

НІЖИНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ МИКОЛИ ГОГОЛЯ

# Фізико-математичні записки

Збірник наукових праць

Ніжин – 2016

Збірник друкується за рішенням Вченої ради  
Ніжинського державного університету імені Миколи Гоголя  
Протокол від 15.12.2016 №5

***Редакційна колегія:***

к. фіз.-мат. н. Ковальчук Ю. О. (відп. ред. і відп. секретар),  
д. техн. н. Казачков І.В., д. фіз.-мат. н. Мельничук О. В.,  
д. фіз.-мат. н. Зінченко Н.М., к. фіз.-мат. н. Віра М.Б.

***Рецензенти:***

д. фіз.-мат. н., професор ***Авраменко О.В.***,  
д. пед. н., професор ***Сергієнко В.П.***

*До збірника включені наукові статті викладачів та студентів фізико-математичного факультету Ніжинського державного університету імені Миколи Гоголя з актуальних питань вищої та прикладної математики, фізики, інформатики, методики викладання дисциплін фізико-математичного циклу, освітньої аналітики.*

*Для фахівців у галузі математики, фізики, інформатики, забезпечення якості освіти, педагогіки вищої та середньої школи.*

## ВАСИЛЬ ПАВЛОВИЧ ЯКОВЕЦЬ – ЛЮДИНА, ВЧЕНИЙ, ПЕДАГОГ



На початку листопада 2016 року минає сорок днів як пішов із життя талановитий математик, вчений, доктор фізико-математичних наук, професор, заслужений працівник освіти України, член Американського математичного товариства, академік Академії наук вищої освіти України Василь Павлович Яковець.

Василь Павлович народився 1 січня 1953 року в с. Охрамієвичі Корюківського району Чернігівської області в селянській родині.

У 1975 році з відзнакою закінчив фізико-математичний факультет Ніжинського державного педагогічного інституту ім. М.В.Гоголя. Отримавши кваліфікацію вчителя математики і фізики, працює вчителем на Київщині (1975-1978 рр.)

Подальша педагогічна та наукова діяльність Василя Павловича була пов'язана з Ніжинською вищою школою, в якій з 1978 року працював спочатку старшим лаборантом, а потім викладачем, старшим викладачем нашого факультету.

Перші наукові дослідження Василя Павловича стосувались асимптотичних методів у теорії диференціальних рівнянь. Вони і стали основою дисертаційних досліджень на здобуття наукових ступенів кандидата фізико-математичних наук (1983 р.), а згодом і доктора фізико-математичних наук (1993 р.).

Основні наукові результати викладені в монографії «Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями». Саме за цикл праць в цьому напрямку Василю Павловичу спільно з академіками А.М. Самойленком та М.І. Шкілем присуджено премію ім. М.В. Остроградського (2004 р.).

Більше двох десятків років Василь Павлович очолював кафедру математики. Саме в цей час при кафедрі розпочала працювати аспірантура зі спеціальності «диференціальні рівняння».

Результати наукових досліджень Василя Павловича знайшли своє продовження в роботах аспірантів (Кочерга О.І., Стрельников М.А., Акименко А.М., Шепель О.А., Чорненька О.В., Віра М.Б., Тарасенко О.В., Пафик С.П.). Під його керівництвом підготовлено і захищено 6 кандидатських дисертацій.

Нині на кафедрі вищої математики працюють кандидати фізико-математичних наук, доценти Віра М.Б., Тарасенко О.В. та Чорненька О.В., яких підготував Василь Павлович. В їх роботах продовжує жити його науковий досвід.

В 1995 році, в період жорсткої економічної кризи та болісних ринкових перетворень Василь Павлович очолив Ніжинський державний педагогічний інститут ім. М.В.Гоголя. Будучи випускником ввіреного йому ЗВО, сформованим під впливом традицій цього закладу, Василь Павлович добре знав його проблеми, бачив перспективи.

Викладачі та співробітники відзначають плановість в діях ректора, чіткість, передбачливість, уміння лічити та розподіляти зароблені кошти, хазяйновитість – це ті риси його діяльності, які принесли університету відчутні та очевидні результати.

Охайними, модернізованими стали навчальні корпуси, приміщення бібліотеки, оснащені новітнім обладнанням навчальні аудиторії, капітально відремонтовані студентські гуртожитки, завершено будівництво житлового будинку для викладачів, що в свою чергу поліпшило умови проживання та праці як студентів, так і викладачів університету.

Помічаючи великий творчий потенціал викладачів та співробітників, Василь Павлович цілеспрямовано, старанно та наполегливо сприяв реформуванню структурних підрозділів нашого славного закладу. Зокрема, в 1996 році в складі інституту відкрився обласний педагогічний ліцей, в 1999 та 2001 роках було засновано навчально-методичні центри у містах Новгород-Сіверський та Прилуки. З червня 1999 року почали функціонувати 4 нові кафедри, в тому числі й кафедра прикладної математики та інформатики. В цей час при кафедрі вищої математики почали діяти магістратура та аспірантура з напрямку диференціальних рівнянь.

У вересні 2002 року було засновано соціально-гуманітарний факультет, який став сьомим факультетом Ніжинської вищої школи.

Великим досягненням нашого закладу є 4-й рівень акредитації педагогічного інституту й одержання високих рангів – державного педагогічного університету (1998 р.) та державного класичного університету (2004 р.).

Як справжній освітянський менеджер Василь Павлович розумів потребу у створенні позитивного іміджу університету, зокрема співочі традиції нашого закладу (ушлявлений хор «Світлич») відчували турботу ректора та його підтримку, як і багато інших традицій, які живуть і нині.

А головне, Василь Павлович завжди йшов в ногу з вимогами часу, що є важливою рисою для менеджера вищої школи.

Наукова спадщина Василя Павловича Яковця складає понад 200 праць. Слід зазначити, що він разом із колективом викладачів нашої кафедри та Чернігівського національного педагогічного університету імені Т.Г.Шевченка видав цикл підручників та посібників з геометрії для закладів вищої освіти, рекомендованих Міністерством освіти і науки України. Зокрема «Аналітична геометрія» «Геометричні перетворення площини», «Курс вищої геометрії» стали базовими посібниками курсу геометрії ЗВО всієї України. Також були опубліковані навчальні посібники для факультативних занять (7, 8, 9 класи). Ці першокласні підручники та посібники, як і вся науково-педагогічна спадщина Василя Павловича увійдуть у скарбницю світової науки і будуть ще довгі роки служити людям.



*Професор Яковець В.П. зі своїми аспірантами*

Василь Павлович був талановитим педагогом, справжнім майстром своєї справи, творчою особистістю, відкритим до нових змін, постійного навчання та вдосконалення.

Василь Павлович був великим учителем, який надихав, підтримував, вболівав за кожного свого учня, студента.

Василь Павлович залишив помітний інтелектуальний і моральний слід у нашому житті. Кожен із нас завдячує йому як керівнику кафедри, навчального закладу, науковому батьку, скромному й чуйному колезі в своєму науковому та професійному становленні. Пам'ять про Василя Павловича житиме вічно у душах, вчинках, творчості колег та учнів.

Яковець Василь Павлович – велика Людина, Вчений, Педагог, якого хочеться наслідувати, проте повторити неможливо!

*Світлій пам'яті Василя Павловича Яковця  
Колеги кафедри вищої математики*

# 1

# Математика та механіка

УДК 517.9

## КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ЛІНІЙНОЇ ВИРОДЖУВАНОЇ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

М.Б. Віра, С.О. Співак

Розглянемо крайову задачу

$$\varepsilon^h B(t, \varepsilon) \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)x + f(t, \varepsilon); \quad (1)$$

$$Mx(0, \varepsilon) + Nx(T, \varepsilon) = d(\varepsilon), \quad (2)$$

в якій  $x(t, \varepsilon)$  – шуканий  $n$ -вимірний вектор,  $t \in [0; T]$ ;  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  – малий дійсний параметр,  $h \in \mathbb{N}$ ;  $A(t, \varepsilon)$ ,  $B(t, \varepsilon)$  – дійсні квадратні матриці  $n$ -го порядку,  $d(\varepsilon)$ ,  $f(t, \varepsilon)$  –  $n$ -вимірні вектори-стовпці;  $M, N$  – матриці зі сталими елементами розмірністю  $n \times n$ . Крім того, будемо передбачати, що виконуються умови:

1° матриці  $A(t, \varepsilon)$ ,  $B(t, \varepsilon)$  і вектор  $f(t, \varepsilon)$  допускають на відрізку  $[0; T]$  рівномірні асимптотичні розвинення за степенями параметра  $\varepsilon$ :

$$A(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A_k(t); \quad B(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k B_k(t); \quad f(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f_k(t); \quad (3)$$

2° коефіцієнти  $A_k(t)$ ,  $B_k(t)$ ,  $f_k(t)$  розвинень (3) нескінченно диференційовані на відрізку  $[0; T]$ ;

3°  $\det B_0(t) = 0, \forall t \in [0; T]$ ;

4° в'язка граничних матриць

$$A_0(t) - \lambda B_0(t) \quad (4)$$

регулярна на даному відрізку  $[0; T]$  і має сталу кронекерову структуру при всіх  $t \in [0; T]$ , тобто кратності всіх власних значень в'язки (4) і відповідних скінченних та нескінченних елементарних дільників є сталими на даному відрізку.

5° вектор  $d(\varepsilon)$  зображується у вигляді асимптотичного розвинення

$$d(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k d_k \quad (5)$$

при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

За таких умов розглянемо питання про відшукування асимптотичного розв'язку  $x(t, \varepsilon)$  задачі (1), (2) у вигляді розвинень за степенями малого параметра  $\varepsilon$ .

Дана стаття присвячена вивченню можливості побудови асимптотичного розв'язку крайової задачі (1), (2) у випадку, коли гранична в'язка матриць  $A_0(t) - \lambda B_0(t)$  має кратний спектр, а саме, будемо передбачати, що виконується наступна умова:

6° гранична в'язка матриць  $A_0(t) - \lambda B_0(t)$  має на заданому відрізку  $[0; T]$  скінченний елементарний дільник  $(\lambda - \lambda_0(t))^p$  кратністю  $p$  ( $p = n - 1$ ) і нескінченний – кратністю  $q = 1$ .

У роботі [1] показано, що у такому випадку однорідна система

$$\varepsilon^h B(t, \varepsilon) \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)x; \quad (6)$$

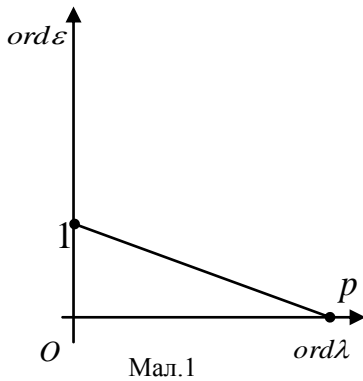
має  $n - 1$  лінійно незалежних асимптотичних розв'язків, що відповідають скінченному елементарному дільнику  $i$ , за виконання умови  $M_{0s} \neq 0$  при деякому  $s$ , яка забезпечує неособливість матриці  $B(t, \varepsilon)$  при досить малих  $\varepsilon$ , відмінних від нуля – один розв'язок, що відповідає нескінченному елементарному дільнику.

Розглянемо найпростіший випадок, коли відмінний від нуля коефіцієнт  $L_{01} = -(\Gamma_1 \varphi, \psi)$  відповідного рівняння розгалуження

$$\lambda^p + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s L_{0s} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s L_{ks} [\lambda^k] = 0, \quad (7)$$

тобто виконується умова

$$(A_1(t)\varphi(t), \psi(t)) - \lambda_0(t)(B_1(t)\varphi(t), \psi(t)) - \delta_{1,h}(B_0(t)\varphi'(t), \psi(t)) \neq 0, \quad \forall t \in [0; T], \quad (8)$$



де  $\varphi(t)$  – власний вектор матриці  $A_0(t)$  відносно  $B_0(t)$ , що відповідає даному власному значенню  $\lambda_0(t)$ , а  $\psi(t)$  – елемент нуль-простору матриці  $(A_0(t) - \lambda_0(t)B_0(t))^*$ . Тоді відповідна діаграма Ньютона має вигляд, зображений на Мал.1, звідки випливає, що розв'язки системи (6), які відповідають скінченному елементарному дільнику граничної в'язки матриць, можна побудувати у вигляді

$$x_j(t, \varepsilon) = u_j(t, \varepsilon) \exp \left( \varepsilon^{-h} \int_{\alpha}^t (\lambda_0(\tau) + \lambda_j(\tau, \varepsilon)) d\tau \right), \quad j = \overline{1, p}, \quad (9)$$

де функції  $\lambda_j(t, \varepsilon)$  і вектор-функції  $u_j(t, \varepsilon)$  зображуються розвиненнями за степенями  $\mu = \varepsilon^{\frac{1}{p}}$ :

$$\lambda_j(t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \lambda_k^{(j)}(t); \quad (10)$$

$$u_j(t, \varepsilon) = \varphi(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k u_k^{(j)}(t), \quad j = \overline{1, p}. \quad (11)$$

При цьому перший коефіцієнт розвинення (10) задовольняє визначальне рівняння

$$(\lambda_1^{(j)}(t))^p + L_{01} = 0, \quad (12)$$

з якого знаходимо

$$\lambda_1^{(j)}(t) = \sqrt[p]{|(\Gamma_1 \varphi, \psi)|} \exp \left( i \frac{\arg((\Gamma_1 \varphi, \psi)) + 2\pi(j-1)}{p} \right), \quad j = \overline{1, p}. \quad (13)$$

Підставивши ряд (10) у рівняння розгалуження (7), і перегрупувавши доданки, дістанемо

$$\sum_{k=p}^{\infty} \mu^k P_p^k(\lambda^{(i)}) + \sum_{k=p}^{\infty} \mu^k L_{0, \frac{k}{p}} + \sum_{k=p+1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{k-1}{p} \rfloor} \sum_{j=1}^{k-sp} \mu^k L_{js} [P_j^{k-sp}(\lambda^{(i)})] = 0, \quad (14)$$

де  $L_{0, \frac{k}{p}} = 0$ , якщо  $k$  не ділиться на  $p$ , а символом  $P_k^s(\lambda^{(i)})$  позначено суму всіх можливих до-

бутків  $k$  множників  $\lambda_{j_1}^{(i)}, \dots, \lambda_{j_k}^{(i)}$ , сума індексів яких  $j_1 + \dots + j_k = s$ .

Прирівнявши в (14) вирази при однакових степенях  $\mu$ , отримаємо нескінченну систему рівнянь

$$P_p^k(\lambda^{(i)}) + L_{0, \frac{k}{p}} + \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{k-1}{p} \rfloor} \sum_{j=1}^{k-sp} L_{js} [P_j^{k-sp}(\lambda^{(i)})] = 0, \quad k = p, p+1, \dots$$

Перше рівняння цієї системи (при  $k = p$ ) збігається з визначальним рівнянням (12). Поклавши в ньому  $p+k$  замість  $k$ , дістанемо

$$P_p^{p+k}(\lambda^{(i)}) + L_{0, \frac{p+k}{p}} + \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{p+k-1}{p} \rfloor} \sum_{j=1}^{p+k-sp} L_{js} [P_j^{p+k-ps}(\lambda^{(i)})] = 0. \quad (15)$$

Взявши до уваги, що

$$P_p^{p+k}(\lambda^{(i)}) = p(\lambda_1^{(i)})^{p-1} \lambda_{k+1}^{(i)} + \tilde{P}_p^{p+k}(\lambda^{(i)}),$$

де  $\tilde{P}_p^{p+k}(\lambda^{(i)})$  – та частина виразу  $P_p^{p+k}(\lambda^{(i)})$ , яка містить тільки ті  $\lambda_j^{(i)}$ , індекси яких  $j < k+1$ , а третій доданок у (15) не містить  $\lambda_j^{(i)}$ , індекси яких перевищують  $k$ , матимемо таку рекурентну формулу для визначення коефіцієнтів  $\lambda_{k+1}^{(i)}(t)$ :

$$\lambda_{k+1}^{(i)}(t) = -\frac{1}{p(\lambda_1^{(i)})^{p-1}} \left( \tilde{P}_p^{p+k}(\lambda^{(i)}) + L_{0, \frac{p+k}{p}} + \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{p+k-1}{p} \rfloor} \sum_{j=1}^{p+k-sp} L_{js} [P_j^{p+k-ps}(\lambda^{(i)})] \right), \quad k = 1, 2, \dots \quad (16)$$

Для знаходження коефіцієнтів розвинення (3.95) для векторів  $u_i(t, \varepsilon)$ , підставимо (11) у вираз

$$u(t, \varepsilon) = \varphi + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s H \tilde{L}_{0s} \varphi + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s H \tilde{L}_{ks} [\lambda^k] \varphi. \quad (17)$$

Перегрупувавши доданки, дістанемо

$$u_i(t, \varepsilon) = \varphi + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k H \tilde{L}_{0,k} \varphi + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{k-1}{p} \rfloor} \sum_{j=1}^{k-ps} \mu^k H \tilde{L}_{js} [P_j^{k-ps}(\lambda^{(i)})] \varphi,$$

звідки випливає, що

$$u_k^{(i)}(t) = \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{k-1}{p} \rfloor} \sum_{j=1}^{k-sp} H \tilde{L}_{js} [P_j^{k-ps}(\lambda^{(i)})] \varphi + H \tilde{L}_{0,k} \varphi, \quad k = 1, 2, \dots, i = \overline{1, p}. \quad (18)$$

Згідно з умовою 6° нескінченний елементарний дільник в'язки матриць  $A_0(t) - \lambda B_0(t)$  простий. Тоді припустимо, що виконується умова

$$7^\circ (B_1 \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \neq 0, \quad \forall t \in [0; T],$$

де  $\tilde{\varphi}(t)$  – власний вектор матриці  $B_0(t)$ , що відповідає її нульовому власному значенню,  $\tilde{\psi}(t)$  – базисний вектор нуль-простору матриці  $B_0^*(t)$ . Тоді розв'язок системи (6), який йому відповідає, побудуємо у вигляді

$$x(t, \varepsilon) = v(t, \varepsilon) \exp \left( \varepsilon^{-h-1} \int_0^t \xi^{-1}(\tau, \varepsilon) d\tau \right), \quad (19)$$

де  $v(t, \varepsilon)$  –  $n$ -вимірний вектор, а  $\xi(t, \varepsilon)$  – скалярна функція, що зображуються у вигляді формальних розвинень за степенями  $\varepsilon$ :

$$v(t, \varepsilon) = \tilde{\varphi}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k v_k(t), \quad \xi(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \xi_k(t). \quad (20)$$

Припустимо, що виконується умова

$$7^\circ \det A_0 \neq 0, \forall t \in [0; T],$$

то, як показано в [1], система рівнянь (6) має на цьому відрізку частинний розв'язок вигляду

$$x(t, \varepsilon) = \tilde{v}(t, \varepsilon), \quad (21)$$

де  $\tilde{v}(t, \varepsilon)$  –  $n$ -вимірний вектор, який зображується формальним розвиненням

$$\tilde{v}(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{v}_k(t). \quad (22)$$

Виходячи з цього, розв'язок крайової задачі (1), (2) будуватимемо у вигляді

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) = & \mu^{1-p} \sum_{i=1}^p u_i(t, \varepsilon) c_i(\varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t (\lambda_0 + \lambda_i(\tau, \varepsilon)) d\tau\right) + \\ & + v(t, \varepsilon) c_n(t, \varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h-1} \int_0^t \xi^{-1}(\tau, \varepsilon) d\tau\right) + \tilde{v}(t, \varepsilon), \end{aligned} \quad (23)$$

де множники  $c_i(\varepsilon)$  зображуються розвиненнями

$$c_i(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(i)} \mu^k, \quad i = \overline{1, n-1}; \quad (24)$$

$$c_n(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(n)} \mu^k. \quad (25)$$

Підставивши (23) у крайову умову (2), дістанемо

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^p M u_i(0, \varepsilon) c_i(\varepsilon) + \mu^{p-1} M v(0, \varepsilon) c_n(\varepsilon) + \mu^{p-1} M \tilde{v}(0, \varepsilon) + \\ & + \sum_{i=1}^p N u_i(T, \varepsilon) c_i(\varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^T \lambda_i(\tau, \varepsilon) d\tau\right) + \\ & + \mu^{p-1} N v(T, \varepsilon) c_n(\varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^T \xi^{-1}(\tau, \varepsilon) d\tau\right) + \mu^{p-1} N \tilde{v}(T, \varepsilon) = \mu^{p-1} d(\varepsilon). \end{aligned} \quad (26)$$

Припустивши, що

$$8^\circ \operatorname{Re} \lambda_0(t) < 0, \operatorname{Re} \xi_0(t) < 0, \forall t \in [0; T],$$

і знехтувавши експоненціально малими доданками, далі замість (26) будемо розглядати рівняння

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^p M u_i(0, \varepsilon) c_i(\varepsilon) + \mu^{p-1} M v(0, \varepsilon) c_n(\varepsilon) + \mu^{p-1} M \tilde{v}(0, \varepsilon) = \\ & = \mu^{p-1} (d(\varepsilon) - N \tilde{v}(T, \varepsilon)). \end{aligned} \quad (27)$$

Враховуючи відповідні розвинення, прирівняємо в цьому рівнянні коефіцієнти при однакових степенях  $\mu$ . Дістанемо систему рівнянь

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^k M u_j^{(i)}(0) c_{k-j}^{(i)} + \sum_{i=0}^{\left[\frac{k-p+1}{p}\right]} M v_i(0) c_{k-p+1-pi}^{(n)} + M \tilde{v}_{\frac{k-p+1}{p}}(0) = d_{\frac{k-p+1}{p}} - N \tilde{v}_{\frac{k-p+1}{p}}(T), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (28)$$

( $a_{\frac{v}{p}} = 0$ , якщо  $v$  не ділиться на  $p$  або  $\frac{v}{p}$  – від'ємне число).

$$9^\circ \det M \neq 0. \quad (29)$$

Тоді, помноживши рівняння (28) на  $M^{-1}$  зліва, дістанемо



$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^k u_j^{(i)}(0) c_{k-j}^{(i)} + \sum_{i=0}^{\left[ \frac{k-p+1}{p} \right]} v_i(0) c_{k-p+1-pi}^{(n)} + \tilde{v}_{\frac{k-p+1}{p}}(0) = \\ = M^{-1} \left( d_{\frac{k-p+1}{p}} - N \tilde{v}_{\frac{k-p+1}{p}}(T) \right); k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (30)$$

При  $k < p-1$  це рівняння має вигляд

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^k u_j^{(i)}(0) c_{k-j}^{(i)} = 0.$$

Взявши до уваги, що при  $j < p-1$

$$u_j^{(i)}(t) = \sum_{s=1}^j H \tilde{L}_{s0} [P_s^j(\lambda^{(i)})] \varphi = \sum_{s=1}^j P_s^j(\lambda^{(i)}) (HB_0)^s \varphi,$$

маємо

$$\sum_{i=1}^p \sum_{s=0}^k \sum_{j=0}^{k-s} P_s^{k-j}(\lambda^{(i)}(0)) c_j^{(i)} (H(0)B_0(0))^s \varphi(0) = 0, k = \overline{0, p-2},$$

звідки, враховуючи лінійну незалежність векторів  $(H(0)B_0(0))^i \varphi(0)$ ,  $i = \overline{0, p-1}$ , приходимо до системи рівнянь

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^{k-s} P_s^{k-j}(\lambda^{(i)}(0)) c_j^{(i)} = 0, s = \overline{0, k}, k = \overline{0, p-2}. \quad (31)$$

Поклавши в (31)  $k = p-1$  і підставивши відповідні вирази для коефіцієнтів  $u_k^{(i)}(t)$ ,  $v_k(t)$ ,  $\tilde{v}_k(t)$ , дістанемо

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{s=0}^j P_s^j(\lambda^{(i)}(0)) c_{p-1-j}^{(i)} (H(0)B_0(0))^s \varphi(0) + c_0^{(n)} \tilde{\varphi}(0) = \\ = M^{-1} (d_0 + NA_0^{-1}(T) f_0(T)) + A_0^{-1}(0) f_0(0). \end{aligned} \quad (32)$$

Позначивши вектор у правій частині цього рівняння  $l_{p-1}$ , розкладемо його за базисом  $(H(0)B_0(0))^i \varphi(0)$ ,  $i = \overline{0, p-1}$ ,  $\tilde{\varphi}(0)$ :

$$l_{p-1} = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i^{(p-1)} [H(0)B_0(0)]^i \varphi(0) + \alpha_p^{(p-1)} \tilde{\varphi}(0).$$

Із врахуванням цього розкладу рівняння (32) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p \sum_{s=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{p-1-s} P_s^{p-1-j}(\lambda^{(i)}(0)) c_j^{(i)} [H(0)B_0(0)]^s \varphi(0) + c_0^{(n)} \tilde{\varphi}(0) = \\ = \sum_{s=0}^{p-1} \alpha_s^{(p-1)} [H(0)B_0(0)]^s \varphi(0) + \alpha_p^{(p-1)} \tilde{\varphi}(0), \end{aligned}$$

звідки, враховуючи лінійну незалежність базисних векторів, дістанемо

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^{p-1-s} P_s^{p-1-j}(\lambda^{(i)}(0)) c_j^{(i)} = \alpha_s^{(p-1)}, s = \overline{0, p-1}, \quad (33)$$

$$c_0^{(n)} = \alpha_p^{(p-1)}. \quad (34)$$

Добавивши останнє рівняння із (33) до системи (31) при  $s = k$ , отримаємо таку систему рівнянь для знаходження сталих  $c_0^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, p}$ :

$$\sum_{i=1}^p [\lambda_1^{(i)}(0)]^k c_0^{(i)} = 0, k = \overline{0, p-2},$$

$$\sum_{i=1}^p [\lambda_1^{(i)}(0)]^{p-1} c_0^{(i)} = \alpha_{p-1}^{(p-1)}.$$

Позначивши

$$c_0 = \text{col}(c_0^{(1)}, \dots, c_0^{(p)}),$$

$$m_0 = \text{col}(0, \dots, 0, \alpha_{p-1}^{(p-1)}),$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1^{(1)}(0) & \lambda_1^{(2)}(0) & \dots & \lambda_1^{(p)}(0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\lambda_1^{(1)}(0))^{p-1} & (\lambda_1^{(2)}(0))^{p-1} & \dots & (\lambda_1^{(p)}(0))^{p-1} \end{pmatrix},$$

запишемо її у векторно-матричному вигляді

$$Wc_0 = m_0. \quad (35)$$

Оскільки визначник цієї системи є визначником Вандермонда, який відмінний від нуля, то з неї однозначно визначається вектор сталих  $c_0$ :

$$c_0 = W^{-1}m_0. \quad (36)$$

Розглянемо рівняння (30) у загальному вигляді. Взявши до уваги формули для коефіцієнтів  $u_k^{(i)}(t)$ , маємо

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^k \sum_{s=0}^j H\tilde{L}_{s0} [P_s^j(\lambda^{(i)}(0))] \varphi(0) c_{k-j}^{(i)} + c_{k-p+1}^{(n)} \tilde{\varphi}(0) = \\ & = M^{-1} \left( d_{\frac{k-p+1}{p}} - N\tilde{v}_{\frac{k-p+1}{p}}(T) \right) - \tilde{v}_{\frac{k-p+1}{p}}(0) - \sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^k H\tilde{L}_{0,\frac{j}{p}} \varphi(0) c_{k-j}^{(i)} - \\ & - \sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^k \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{j-1}{p} \rfloor} \sum_{r=1}^{j-ps} H\tilde{L}_{rs} [P_r^{j-ps}(\lambda^{(i)}(0))] \mathfrak{F}_{k-j}^{(i)} \varphi(0) - \\ & - \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k-p+1}{p} \rfloor} v_i(0) c_{k-p+1-pi}^{(n)}, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (37)$$

Позначивши  $l_k$  вектор у правій частині цього рівняння (при  $k < p-1$ ,  $l_k = 0$ ), розкладемо його за базисом:

$$l_k = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i^{(k)} [H(0)B_0(0)]^i \varphi(0) + \alpha_p^{(k)} \tilde{\varphi}(0).$$

Із врахуванням цього розкладу рівняння (37) набуває вигляду

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^p \sum_{s=0}^k \sum_{j=0}^{k-s} P_s^{k-j}(\lambda^{(i)}(0)) c_j^{(i)} (H(0)B_0(0))^s \varphi(0) + c_{k-p+1}^{(n)} \tilde{\varphi}(0) = \\ & = \sum_{s=0}^{p-1} \alpha_s^{(k)} [H(0)B_0(0)]^s \varphi(0) + \alpha_p^{(k)} \tilde{\varphi}(0), \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

звідки, взявши до уваги лінійну незалежність базисних векторів, приходимо до системи рівнянь

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^{k-s} P_s^{k-j}(\lambda^{(i)}(0)) c_j^{(i)} = \alpha_s^{(k)}, \quad s = \overline{0, k}, \quad k = 0, 1, \dots; \quad (38)$$

$$c_{k-p+1}^{(n)} = \alpha_p^{(k)}. \quad (39)$$

Взявши отримані на попередніх кроках рівняння системи (38), що містять сталі  $c_0^{(i)}, c_1^{(i)}, \dots, c_k^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, p}$ , дістанемо таку систему для визначення сталих  $c_k^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, p}$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p c_k^{(i)} &= \alpha_0^{(k)}; \\ \sum_{i=1}^p \lambda_1^{(i)}(0) c_k^{(i)} &= \alpha_1^{(k+1)} - \sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^{k-1} P_1^{k+1-j} (\lambda^{(i)}(0)) c_j^{(i)}; \\ &\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^p [\lambda_1^{(i)}(0)]^{p-1} c_k^{(i)} &= \alpha_{p-1}^{(k+p-1)} - \sum_{i=1}^p \sum_{j=0}^{k-1} P_{p-1}^{k+p-1-j} (\lambda^{(i)}(0)) c_j^{(i)}. \end{aligned}$$

Записавши її у векторно-матричній формі

$$Wc_k = m_k, \tag{40}$$

де  $c_k = col(c_k^{(1)}, c_k^{(2)}, \dots, c_k^{(p)})$ ,  $m_k$  – вектор у правій частині, знайдемо

$$c_k = W^{-1} m_k. \tag{41}$$

Отже,

$$c_k^{(i)} = \{W^{-1} m_k\}_i, \quad i = \overline{1, p}, \quad c_{k-p+1}^{(n)} = \alpha_p^{(k)},$$

де  $\{l\}_k$  –  $k$ -й елемент вектора-стовпця  $l$ . Ця формула має рекурентний характер і дозволяє визначити сталі  $c_k^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , якщо  $c_j^{(i)}$  при  $j < k$  знайдено на попередніх кроках. Визначення сталей  $c_k^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $k = 0, 1, \dots$  завершує побудову формального розв'язку.

Теорема 1. Якщо  $M, N$  – квадратні матриці  $n$ -го порядку і виконуються умови 1° – 9°, то при досить малих  $\varepsilon$  крайова задача (1), (2) має єдиний розв'язок, який зображується асимптотичною формулою

$$x(t, \varepsilon) = x_m(t, \varepsilon) + O(\mu^{m+3-p(h+4)}),$$

де вектор  $x_m(t, \varepsilon)$  має вигляд

$$\begin{aligned} x_m(t, \varepsilon) &= \mu^{-(p-1)} \sum_{i=1}^p \sum_{k=0}^m \mu^k \left( \sum_{j=0}^k c_j^{(i)} u_{k-j}^{(i)}(t) \right) \exp \left( \varepsilon^{-h} \int_0^t \lambda_m^{(i)}(\tau, \varepsilon) d\tau \right) + \\ &+ \sum_{k=0}^m \mu^k \left( \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{p} \rfloor} v_j(t) c_{k-pj}^{(n)} \right) \exp \left( \varepsilon^{-h-1} \int_0^t \xi_m^{-1}(\tau, \varepsilon) d\tau \right) + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m}{p} \rfloor} \mu^{kp} \tilde{v}_k(t), \end{aligned}$$

$$\lambda_m^{(i)}(t, \varepsilon) = \lambda_0(t) + \sum_{k=1}^m \mu^k \lambda_k^{(i)}(t), \quad i = \overline{1, p};$$

$$\xi_m(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m}{p} \rfloor} \mu^{kp} \xi_k(t).$$

### Література

1. Самойленко А. М. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями / А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець. – К.: Вища школа, 2000. – 294 с.

УДК 001.51 : 5 : 52 + 54 + 573.22

## МЕТОДИКИ ВИЗНАЧЕННЯ І РОЗРАХУНКУ КРИТИЧНИХ РІВНІВ У РОЗВИТКУ СКЛАДНИХ СИСТЕМ РІЗНОЇ ПРИРОДИ З ВІДХИЛЯЮЧИМИ АРГУМЕНТАМИ ДЛЯ ЇХ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ НИМИ

І.В. Казачков

**Актуальність проблеми.** Критичні процеси та режими у розвитку складних систем найрізноманітнішої природи (як живої, так і технічної та іншої) [1-7], що пов'язані з різними ускладнюючими факторами, зокрема з наявністю відхиляючих аргументів системи, складають цікавий сучасний напрямок досліджень. Інтенсивні дослідження у цьому напрямку ведуться в останні декілька десятиліть і розроблені методи застосовуються для оптимізації керування технічними, фінансово-економічними, природними та іншими процесами. Так, ефективний метод досліджень подібних систем був розвинений у роботі [1], де надано також багато прикладів з різних галузей, різного походження та природи.

Побудова адекватних фізико-математичних моделей розвитку складних систем з відхиляючими аргументами та визначення критичних режимів їх ефективного управління – актуальна задача для широкого кола сучасних проблем, значення якої важко переоцінити. Критичні рівні у розвитку економічних, банківських, промислових, технічних, суспільно-політичних та інших систем необхідно визначати та передбачати, щоб керувати відповідними системами за вимоги стабільного розвитку системи, без попадання в критичні ситуації, що призводять до зростаючих коливань параметрів системи, що руйнують її.

**Короткий огляд сучасного стану проблеми.** Теорія нелінійних динамічних систем з відхиляючими (зсувними) аргументами надає потужний математичний інструмент для дослідження складних систем та визначення критичних рівнів у їх розвитку. Властивості багатьох реальних об'єктів суттєво залежать від ефекту післядії, який полягає в тому, що їх поведінка в наступний момент часу залежить від попередньої історії розвитку, а не тільки від поточного стану об'єкта. Найпростіші випадки подібних систем вивчали в теорії функціонально-диференціальних рівнянь з відхиляючими аргументами (запізненнями та випередженнями): [8-26]. Реальні об'єкти значно складніші і математичні моделі, що їх описують, навіть при спрощенні описуються системами диференціальних рівнянь, аргументи яких залежать від багатьох відхиляючих аргументів [2-7], які до того ж можуть самі залежати від часу та бути пов'язані між собою.

За декілька десятиліть отримані фундаментальні результати теорії динамічних систем з запізнюючими та випереджаючими аргументами сформували теорію диференціальних рівнянь з відхиляючими аргументами, яка на протязі останніх 20 років застосовувалась до моделювання різних складних систем з широкого кола різноманітних галузей науки, техніки, живої природи, економіки та банківської справи, тощо. Розробці чисельних алгоритмів рішення задач, а також їх застосуванню присвячено чимало зусиль, наприклад, [9, 11-13, 18-24], де рівнянням з випередженнями майже не приділялось уваги. Тільки в роботах [9, 11] надано класифікацію задач з випереджаючими аргументами. Стосовно нелінійних динамічних систем із запізнюючими та випереджаючими аргументами, слід відзначити, що вони розглядались в роботах [2-7, 14, 27]: для моделювання потенційно небезпечних об'єктів ядерної енергетики [2-7, 27], динаміки популяцій в біологічних системах та передачі електричних сигналів в електротехнічних системах високовольтних ліній електропередач. Цікаво, що в теорії керування руху систем з запізненнями застосування необхідних умов оптимальності у формі принципу максимуму Понтрягіна призводить до спряженої системи рівнянь із випередженнями [10].

Для розв'язку диференціальних рівнянь із запізнюючими та випереджаючими аргументами ефективними є чисельні методи, а також методи усереднення диференціальних та інтегральних і інтегро-диференціальних операторів, які дозволили виконати математичне моделювання широкого кола складних процесів та систем. Зокрема, моделювання динаміки поведінки потенційно небезпечних виробництв, базуючись на статистичних відомостях про роботу об'єктів. Так, агрегована модель розвитку ядерних енергетичних об'єктів, побудована та досліджена в роботах [2-7], дозволяє проводити комп'ютерні експерименти для виявлення цікавих особливо-

стей розвитку на рівні ядерної енергетичної галузі чи окремої атомної електростанції, знаходити оптимальні стратегії, виявляти критичні та аварійно небезпечні ситуації, тощо. Це може певною мірою сприяти покращенню керуванням відповідними об'єктами та зниженню їх негативного впливу на навколишнє природне середовище. А оскільки подібні складні об'єкти у більшості випадків не дозволяють побудувати їх точні детерміновані математичні моделі внаслідок великої кількості впливових параметрів та нерідко невідомих зв'язків між ними, то агреговані моделі, побудовані на статистичних даних про об'єкт, можуть бути корисними для вивчення природи та поведінки об'єктів.

**Постановка задачі.** Дана стаття присвячена моделюванню та аналізу особливостей поведінки різних систем на основі останніх досягнень теорії, зокрема, методу, розвинутого у роботі [1]. Розглядаються рівняння розвитку систем з запізненнями та випередженнями і показується, які мають бути темпи розвитку та інші параметри, щоб система зоставалась у стані стабільного розвитку і не підпадала під режими коливань зростаючої в часі амплітуди, які її швидко руйнують. Основна увага приділена особливостям поведінки систем, методологічним та математичним задачам побудови і використання таких моделей прикладного характеру. Також обговорюються особливості постановки ряду невирішених задач.

**Фізико-математичні моделі розвитку складних систем.** Побудова фізико-математичних моделей розвитку складних систем у достатньо загальній постановці вимагає врахування запізнюючих та випереджаючих аргументів, оскільки розвиток систем реально супроводжується запізненнями порівняно з плановими показниками внаслідок різних причин та орієнтацією на випереджаючі показники, що відомо як термін «переадаптація» [1]. Такі явища реально спостерігаються у ряді різноманітних процесів та систем як живої природи, так і технічного походження. Найперше рівняння розвитку було розглянуто ще у 18-19 сторіччі у вигляді

$$\frac{dy}{dt} = ky, \quad (1)$$

де  $y, t$  - відповідно, функція, що описує розвиток якоїсь величини, та час,  $k$ - коефіцієнт росту системи, який в загальному випадку може бути функцією часу.

Вперше розв'язок рівняння (1) для найпростішого випадку з постійним коефіцієнтом росту отримав священник Мальтус, який зробив висновок щодо експоненційного росту населення з часом, якщо воно описується рівнянням розвитку (1). Такий закон росту населення був розцінений як загрозливий для суспільства і породив філософську течію мальтузіанства, за якою виправдовували війни як необхідний механізм регулювання росту народонаселення. Це була велика помилка, базована на спрощеному рівнянні росту системи. Насправді в подальшому було показано, що система може починати розвиток за законом (1), а надалі коефіцієнт  $k$  залежить від часу, наприклад, спадає по гіперболічному закону (алометричний процес) і тому функція зростає з часом уповільнено, не за експоненційним законом.

З того часу було багато спроб застосування як такого найпростішого рівняння розвитку, так і багатьох інших, більш точно враховуючих особливості розглядуваних систем. Так, спостереження розвитку ряду систем показали, що процеси розвитку краще описуються дещо іншими рівняннями: з часом в деяких випадках коефіцієнт  $k$  поступово або різко спадає і це призводить до розв'язків, в яких відсутнє експоненційне зростання функції. Така поведінка краще відповідає реаліям різних систем різноманітної природи: спочатку йде інтенсивний процес розвитку, який з часом коригується за результатами розвитку і аналізом потреб розвитку. Також у реальних системах завжди наявні певні запізнення та випередження у часі (перші за умов відставання керуючих механізмів, а другі внаслідок планування і орієнтації керування системою на бажані майбутні показники, а не на реальні поточні). До того ж в багатьох системах має місце нелінійність розвитку [2-7], яку на прикладі рівняння (1) можна продемонструвати наступним чином:

$$\frac{dy}{dt} = ky(A - y), \quad (2)$$

де  $A$ - гранично можливе значення функції  $y$ . Граничні значення визначаються природним чи штучним шляхом відповідно до розглядуваної системи: наприклад, це може бути гранична кількість населення за існуючих умов відносно наявних запасів харчування, кількість робітників

для галузі, якщо розглядається промисловість і відоме граничне можливе значення, обмежена кількість фінансового забезпечення при розвитку банківської структури і тому подібне. Тож в такому разі в рівнянні розвитку (2) враховується той факт, що по мірі наближення функції росту системи до її граничного значення інтенсивність росту системи буде природним шляхом спадати і при досягненні границі подальше зростання припиняється на досягнутому рівні  $y = A$ .

Іншого роду нелінійності системи (1) можуть виникати внаслідок залежності коефіцієнта  $k$  від часу та функції  $y$  від відхиляючих аргументів [1-7]:

$$\frac{dy}{dt} = ky(t - \tau), \quad (3)$$

де  $\tau$ - запізнення системи в часі. Для розв'язку рівняння (3) необхідно задати початкові умови на інтервалі часу  $\tau$ , що передує початковому моменту часу або розглядати включення механізму запізнювання тільки після проміжку часу  $\tau$ . Це – суттєва особливість рівнянь з запізненнями, яка істотно ускладнює їх розв'язок (при чисельному розв'язку диференціальних рівнянь з автоматичним вибором кроку за часом необхідно апроксимувати значення  $y$  в точках із зсувом за часом, які можуть бути відсутніми при автоматичному розбитті інтервалу часу).

Рівняння (3) має значно ширше коло застосування до моделювання розвитку складних систем, оскільки воно враховує можливість відставання розвитку системи (процесу) щодо поточного стану системи. Якщо коефіцієнт росту системи  $k$  в рівнянні (3) додатний, то має місце зростання функції  $y$ , якщо ж від'ємний – затухання системи (спадання функції  $y$ , тобто падіння розвитку, вимирання популяції, скорочення фінансування банку і т.д. - в залежності від природи складної системи, що моделюється). Але рівняння з відхиляючими аргументами мають більш складні режими та особливості, зокрема, критичні рівні розвитку та можливі нестійкості, які швидко призводять до руйнування системи [1]. Такі режими особливо важливі і їх необхідно ретельно досліджувати. У реальних складних системах рівнянь типу (3) може бути багато і за кожним з багатьох взаємопов'язаних параметрів системи може бути своє запізнення, що значно ускладнює математичну модель системи [2-7].

**Розв'язки рівнянь з відхиляючими аргументами.** Розв'язок рівняння (3) з постійними запізненням та коефіцієнтом росту можна розшукувати у вигляді розв'язків, подібних до розв'язків рівняння (1):

$$y = y_0 e^{zt} \quad (4)$$

де  $y_0$ - початкове значення  $y$  при  $t = 0$ ,  $z = u + iv$  – власні числа диференціального оператора,  $u, v$  - відповідно дійсна та уявна частини власних чисел,  $-i = \sqrt{-1}$  - уявна одиниця. Якщо підставити пошукуваний розв'язок у вигляді (4) до рівняння (3), можна отримати рівняння для визначення власних чисел (після скорочення на  $e^{zt}$ ):

$$z = ke^{-z\tau}. \quad (5)$$

Застосувавши в рівнянні (5) формулу Ейлера для експоненти уявного числа, можна для дійсної та уявної частин рівняння (5) записати наступне:

$$u = ke^{-u\tau} \cos v\tau, \quad v = -ke^{-u\tau} \sin v\tau, \quad (6)$$

звідки випливає, що при  $v = 0$  буде два випадки: експоненційно зростаючий ( $u > 0$ ) та експоненційно спадаючий ( $u < 0$ ) в часі процес. При  $v \neq 0$  маємо, відповідно, коливальні режими розвитку системи з експоненційно спадаючою ( $u < 0$ ) та експоненційно зростаючою ( $u > 0$ ) амплітудами. У першому випадку процес коливально затухає з часом і є стійким (може призвести до виродження системи, припинення її функціонування), тоді як у другому випадку зростаючі з часом коливання швидко зруйнують систему. Наприклад, у випадку фінансової системи це означає, що розкачування її росту та спадання призведе до повного колапсу. Тож треба знайти умови, при яких можна запобігти виникненню режиму коливань зростаючої амплітуди і керувати системою так, щоб вона розвивалась, зростаючи плавно, без коливань.

З таких загальних міркувань можна, наприклад, зробити висновок, що фінансування проекту треба ретельно контролювати щодо особливостей розвитку, які моделюються відповідними рівняннями, та можливих запланованих відставань у часі. Якщо запізнення у часі переви-

шують гранично припустимі для розглядуваної системи значення, то можуть виникнути коливання параметрів системи зростаючої з часом амплітуди, які зруйнують систему. Звідси випливає, що затримки у розвитку до граничного рівня нічого суттєво не змінюють, а при перевищенні граничних значень уся система швидко руйнується.

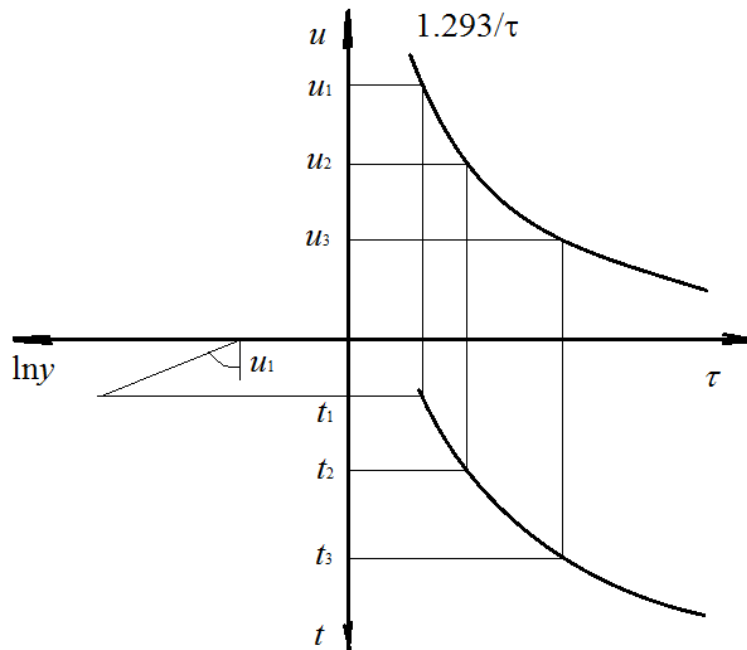
**Визначення критичних рівнів системи та керування нею в режимі докритичного (плавного) поступового розвитку.** Дослідження рівнянь (6) при  $v \neq 0$  на предмет появи значень  $u > 0$  призводить до наступних умов:

$$v\tau = \frac{3}{2}\pi + 2\pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad k\tau = v\tau = \frac{3}{2}\pi + 2\pi n, \quad (7)$$

звідки витікає, що першим критичним значенням, при якому виникають коливання системи зростаючої амплітуди, буде  $k\tau = \frac{3}{2}\pi$ . Тому з виразу (6) отримується наступне:  $u\tau = \frac{3}{2}\pi e^{-u\tau}$ , а це призводить до чисельного розв'язку  $u\tau = 1.293$ .

Таким чином, стабільний розвиток системи можливий тільки до визначеної границі, а далі буде швидкий розпад системи внаслідок зростаючих коливань. Щоб запобігти цьому, необхідно так керувати зростаючою системою (процесом), щоб її експоненційний чи іншої природи зріст продовжувався не далі, як буде досягнуто значення запізнення  $\tau = 1.293/u$ , а це означає, що при заданому рівні зростання системи  $u$  постійне збільшення запізнення розвитку системи в часі допускається лише до критичного значення запізнення  $\tau = 1.293/u$ , після чого починається швидке руйнування системи внаслідок її коливань зростаючої амплітуди. Тому стратегія сталого розвитку системи з запізненням вимагає керувати системою так, щоб, починаючи з якогось значення темпу росту системи  $u = u_1$ , після досягнення нею критичного значення запізнення  $\tau = \tau_1 = 1.293/u_1$ , система зменшувала запізнення або знижувала темп розвитку.

Означені особливості розвитку системи можна наглядно прослідити за Мал. 1:



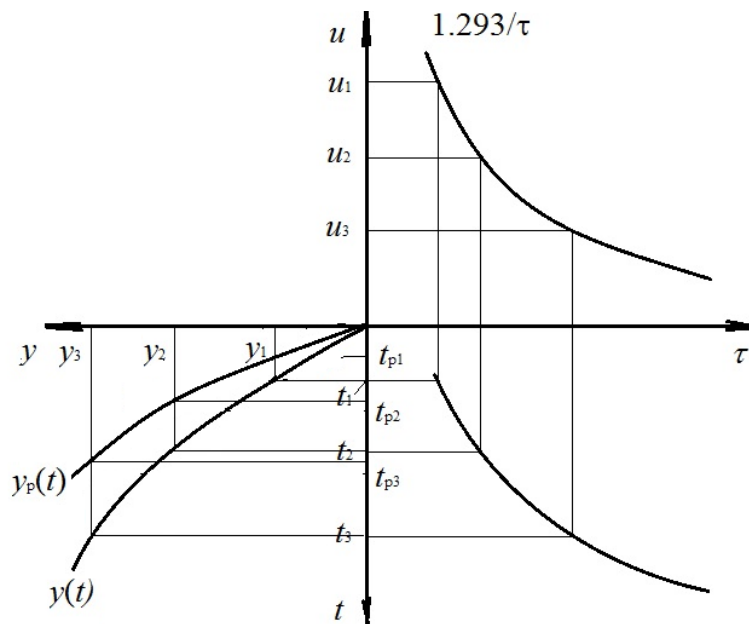
Мал. 1. Критичні рівні залежності темпів росту системи та пов'язаного з ним запізнення: у першому квадранті показана критична залежність темпу розвитку з запізненням, у четвертому квадранті – залежність запізнення від часу, у третьому –  $\ln u$  від часу

Режими стабільного розвитку системи, згідно з Мал. 1, знаходяться нижче кривої  $u = 1.293/\tau$ , зображеної у першому квадранті (границя області сталого розвитку). Тому розвиток можна прогнозувати в оптимальному режимі наступним чином. Якщо починається зростання системи із заданим на початку бажаним темпом  $u_1$ , то такий темп може витримуватись тільки до моменту часу, коли зростаюче запізнення системи в момент часу  $t = t_1$ , стає критич-

ним (пряма  $u = u_1$  перетинає критичну криву  $u = \frac{1.293}{\tau}$ ) у точці  $\tau_1(t_1)$ , після чого подальше зростання системи із заданим темпом неможливе за умови подальшого зростання запізнення. Треба знизити темп росту системи, наприклад, до якогось значення  $u = u_2$ , після чого з'являється додатковий ресурс системи щодо росту запізнення до перетину критичної кривої на нижчому рівні росту. Якщо можливо, то для стійкого розвитку необхідно знизити зростання запізнення системи, що в багатьох випадках погано контролюється або зовсім не контролюється. Якщо ж запізнення некеруване, то таким способом можна покращити ситуацію та керувати системою, знижуючи темп росту кожного разу при досягненні критичного значення запізнення.

В реальних умовах моменти переключення керування системи за вищеописаним сценарієм можна здійснювати наступним чином. Наприклад, банк фінансує проект, для якого рівняння розвитку визначене у заданому вигляді, розв'язок якого знайдений, тож функція  $y(t)$  для сталого розвитку відома. Якщо необхідно врахувати можливі запізнення в системі та керувати нею для досягнення оптимального розвитку та відсутності критичних режимів, які руйнують систему, то необхідно визначати запізнення порівнянням характеристик системи у реальному часі з розрахунковими, як показано на Мал. 2.

Прогнозні параметри системи  $y_p(t)$ , отримані без урахування можливих запізнень у часі, у порівнянні з такими параметрами  $y(t)$ , які отримані з урахуванням запізнень, порівнюються для однакових значень, в результаті чого знаходяться відповідні запізнення виразами:  $\tau_1 = t_1 - t_{p1}$ ,  $\tau_2 = t_2 - t_{p2}$ ,  $\tau_3 = t_3 - t_{p3}$  і так далі. Таким чином можна визначити реальні запізнення, якщо маємо результати реальної поведінки системи. Це дозволяє визначити оптимальні режими розвитку системи та запобігти критичним і катастрофічним ситуаціям.



Мал. 2. Порівняльні характеристики розвитку реальної системи із запізненнями у часі та прогнозної системи без запізнень для визначення значень запізнень

У монографії [1], окрім теоретичних питань, розглянуто велику кількість прикладів застосування знайдених особливостей розвитку систем з запізненнями у часі. Зокрема, розглянуто питання щодо того, якою повинна бути стратегія розвитку в області нижче критичної (під критичною кривою, показаною на Мал. 1), до якої міри слід знижувати запізнення або темп розвитку, щоб зоставатись в режимі сталого експоненційного розвитку. Як при цьому перебудувати систему, щоб вона продовжувала зростати.

Це питання надважливе для багатьох природних, технічних і інших систем. Так, практика свідчить, що більшість фінансових та економічних систем не отримують такого керування і після періоду інтенсивного розвитку попадають у стан повільного розвитку або стагнації чи повної руйнації. Це відбувається тому, що закони розвитку систем з запізненнями та випереджен-



нями, з проявом суттєвих нелінійностей, надто складні для розуміння без математичного моделювання та оптимізації стратегії розвитку, без врахування найбільш суттєвих особливостей поведінки систем, включення механізмів перебудови систем під майбутні бажані характеристики.

Будь-яке керування складними системами має не тільки враховувати запізнення у часі, але воно також базується на прогнозі, а тому механізм перебудови керованої системи під її стабільний розвиток має бути випереджувальним. Тож керування розвитком систем в багатьох випадках вимагає одночасно та узгоджено враховувати як можливі запізнення в часі, так і включення механізмів перебудови (адаптації) системи під майбутні характеристики.

**Особливості рівнянь з випередженнями.** Для вивчення особливостей механізмів випередження та їх впливу на стабільний розвиток систем можна розглянути, наприклад, наступну математичну модель у вигляді рівняння розвитку

$$\frac{dy}{dt} = ky(t + \tau), \quad (8)$$

де  $\tau$ - випередження системи у часі. Рівняння (8) означає, що темп розвитку системи, що описується такою математичною моделлю, орієнтований не на поточні показники, як у рівнянні (1) і не на попередні показники, як у рівнянні (3), а на майбутні показники. Для розв'язку рівняння (8) необхідно задати початкові умови на інтервалі часу від нуля до  $\tau$ .

Наприклад, фінансується проект і його виконання у кожний момент часу має такий темп, який відповідає не теперішньому рівню фінансування, а тому, який відповідає майбутньому, більш високому рівню, до якого йде керівник. Це - випадок розвитку на випередження. Моделювання розвитку складних систем з випередженнями у часі має свої цікаві особливості, які варто дослідити та використовувати для оптимального керування розвитком систем (процесів).

Розглядаючи розв'язок рівняння (8) у вигляді (4) та підставляючи пошукуваний розв'язок  $y = y_0 e^{zt}$  до рівняння (8), можна отримати рівняння для визначення власних чисел (після скорочення на  $e^{zt}$ ):

$$z\tau = kte^{z\tau}, \quad (9)$$

звідки після дослідження можливих розв'язків рівняння (9) випливає, що найбільше значення  $k\tau$ , при якому існує розв'язок рівняння (9), задовольняє умовам:

$$u\tau = 1, \quad k\tau = 1/e, \quad (10)$$

звідки видно, що як і для рівняння з запізненням, при  $v = 0$  буде два випадки: експоненційно зростаючий ( $u > 0$ ) та експоненційно спадаючий ( $u < 0$ ) в часі. При  $v \neq 0$  маємо, відповідно, коливальні режими розвитку системи з експоненційно спадаючою ( $u < 0$ ) та експоненційно зростаючою ( $u > 0$ ) амплітудами. У першому випадку процес коливально затухає з часом і є стійким (може призвести до виродження системи, припинення її функціонування), тоді як у другому випадку зростаючі з часом коливання швидко зруйнують систему. Тільки тут умови (10), на відміну від випадку запізнення в системі, визначають нижню границю стійкого росту системи. Темпи розвитку системи з урахуванням випередження в часі, які нижчі за  $u = 1/\tau$ , будуть призводити до появи зростаючих у часі коливань системи, що призводять до її руйнації.

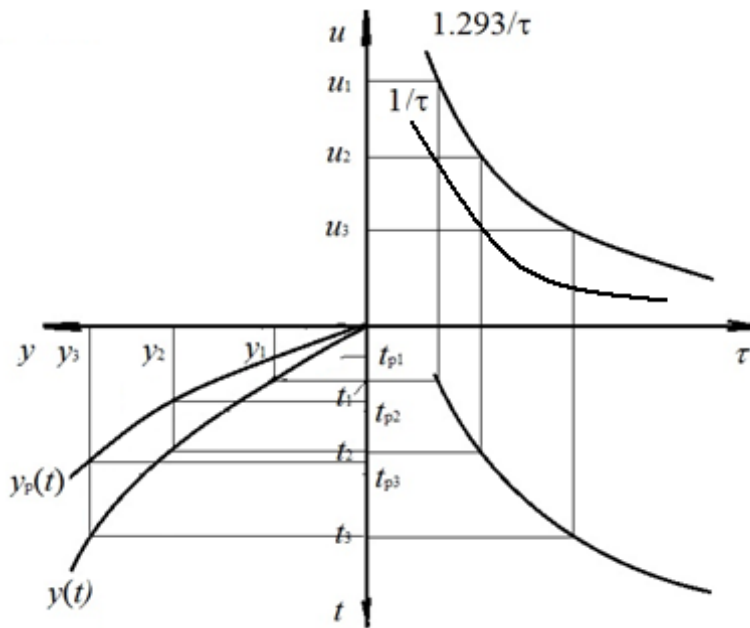
Вищенаведене змушує зробити висновок, що для сталого розвитку системи параметри процесів запізнюючого та випереджаючого типів повинні бути узгодженими [1], що можна розглядати як глобальний закон оптимального керування систем. Таким чином, з виразу (10) та з попередньо отриманих аналогічних виразів для критичних рівнів систем з запізненням випливає, що співвідношення темпів росту запізнюючого та випереджаючого типів дорівнює приблизно 1,293.

За результатами досліджень [1] можна рекомендувати наступний метод визначення розвитку системи та її критичних точок, ілюструючи процес згідно Мал. 3, де у першому квадранті представлено дві критичні криві, відповідно, для стратегії із запізненням (верхня) та із випередженням (нижня). У будь-якому разі стабільний розвиток можливий тільки між цими двома стратегіями і реальна поведінка системи може бути лише всередині області між ними.

Нехай, наприклад, відомий початковий темп розвитку системи та її розмір (рівень, кількість величини, що характеризує систему). Оскільки темп розвитку системи у напівлогарифмічному масштабі є кут нахилу лінійної ділянки залежності відносно осі абсцис, то можна вимі-

рвати цю величину та відкласти її на графіку Мал. 3. Таке значення темпу стабільного експоненційного розвитку може застосовуватись до критичної кривої (досягнення критичної точки). Далі, якщо відома залежність запізнення від часу (четвертий квадрант), то критична величина запізнення визначає час появи критичної точки, за якою може бути визначений кінець експоненційного режиму росту із заданим темпом.

Якщо тепер зменшити цей темп росту у 1,293 рази, то можна перейти на нижню границю припустимої області стабільного експоненційного росту, яка відповідає критичному рівню системи з випередженням. Це буде новий темп росту, за яким можна визначити кут нахилу у третьому квадранті. Таким чином, послідовно визначаються тенденції росту та моменти появи критичних ситуацій у розвитку системи. Визначення структури таких залежностей запізнь від різних впливових факторів дозволяє створити базу для подальшого дослідження особливостей розвитку системи та спрогнозувати її оптимальне керування.



Мал. 3. Схема прогнозу стратегій стабільного розвитку системи з врахуванням критичних рівнів для стратегій з запізненням та випередженням

**Приклад побудови стратегії керування об'єктом із запобіганням критичних режимів при стабільному розвитку.** Враховуючи розглянуті особливості поведінки розвитку систем з відхиляючими аргументами, можна побудувати стратегію керування наступним чином. Нехай в початковий момент часу ( $t = 0$ ) інтенсивність розвитку дорівнює  $u_0$ , запізнення відсутнє ( $\tau = 0$ ), тому система згідно (4) розвивається за законом

$$y = y_0 e^{u_0 t} \quad (11)$$

до моменту часу  $t = t_1$ , де запізнення дорівнює  $\tau_1(t_1) = 1,293/u_0$ , після чого має бути переключення темпу розвитку системи на границю області випереджаючих аргументів  $u_1 = 1/\tau_1 = u_0/1,293$ . Далі система продовжує стабільне зростання за законом (11) з новим темпом  $u_1$  до моменту часу  $\tau_2(t_2) = 1,293/u_1$ , коли запізнення досягне значення критичного рівня розвитку для стратегії із запізненням (див. Мал. 1-3). Після цього знову необхідно переходити на нижню критичну криву, яка відповідає стратегії розвитку з урахуванням випередження, тобто  $u_2 = 1/\tau_2 = u_1/1,293$ . І так далі до виконання бажаного рівня розвитку системи. Очевидно, що з часом по мірі наростання запізнення темп розвитку вповільнюється і може стати неефективним, тому краще зупинитись і потім продовжити розвиток, розпочинаючи його знову без запізнення.

Для контролю запізнення зручно мати залежність  $\tau(t)$ , тому її можна отримати, наприклад, як поліном другого порядку, що задовольняє розглянутим умовам:  $t = 0, \tau = 0$ ;  $t = t_1, \tau = \tau_1$ ;  $t = t_2, \tau = \tau_2$ . Така залежність має вигляд

$$\tau = (a_1 + a_2 t)t, \quad (12)$$

де  $a_1 = \frac{\tau_1 t_2^2 - \tau_2 t_1^2}{t_1 t_2 (t_2 - t_1)}$ ,  $a_2 = \frac{\tau_2 t_1 - \tau_1 t_2}{t_1 t_2 (t_2 - t_1)}$ . Звідси з урахуванням вище наведеного з формули (12) витікає наступний вираз для запізнення як функції часу:

$$\tau = \frac{1,293t}{t_1 t_2 (t_2 - t_1)} \left[ \frac{t_1}{u_1} (t - t_1) + \frac{t_2}{u_0} (t_2 - t) \right]. \quad (13)$$

Таким чином, стабільний розвиток системи відбувається за формулою (11) до наступного моменту критичного часу, де перемикається темп на наступний і так і кожний критичний момент. А моменти перемикавання темпу розвитку розраховуються за виразом (13). Наприклад,  $y_0 = 1$  млрд гривень, початковий темп росту фінансового плану прийнятий  $u_0 = 1,293/p$ , тому за рік за формулою (11) мали б отримати  $y = y_0 e^{1,293} \approx 3,63 y_0$ , тобто 3,63 млрд гривень доходу. Але запізнення  $\tau_1 = 1$  рік. Тому на наступний рік необхідно змінити темп росту до  $u_1 = 1/p$ . За наступний рік дохід має бути приблизно 2,71 млрд гривень. Запізнення дорівнює  $\tau_2 = 1,293$  р, тому за час 1,293 роки дохід буде 3,63 млрд. А далі необхідно змінити темп розвитку до  $u_2 = 1/1,293 \approx 0,77$ . Останній темп дає дохід приблизно 2,15 млрд за рік. І так далі.

**Нелінійність систем.** Рівняння системи (1) лінійні, а рівняння системи (2) нелінійні. Нелінійність в системі за математичною моделлю (2) порівняно нескладна. А рівняння системи (3) з запізнюючими аргументами здається лінійною, але вона містить гірший тип нелінійності ніж (2). Якщо в рівнянні (3) замінити функцію від запізнюючого аргументу  $y(t - \tau)$  згідно з теоремою Ельсгольца [8], за якою для монотонних функцій можна в розкладі відносно точки  $t$  по запізненнях  $\tau$  утримати тільки лінійні члени, оскільки лінійне наближення буде найточнішим:  $y(t - \tau) \approx y(t) - \tau \frac{dy}{dt}$ , то рівняння (3) приймає наступний наближений вигляд:

$$(1 + k\tau) \frac{dy}{dt} = ky(t), \quad (14)$$

Рівняння (14) порівняно мало відрізняється від (1) і запізнення впливає лише на деформацію часу. Але коли функція немонотонна, а саме такі розв'язки можуть бути осцилюючими зі зростаючою амплітудою, то теорема Ельсгольца не має місця і замість лівої частини в (14) буде повний ряд Тейлора за похідними функції  $y$  та степенями запізнення  $\tau$ . Останній випадок являє собою саме критичний, приклади яких щойно розглядалися.

Значно сильніший вплив запізнення у випадку нелінійного рівняння (2) з запізнюючим аргументом:

$$\frac{dy}{dt} = ky(t - \tau)(A - y(t - \tau)), \quad (15)$$

яке навіть для монотонного зростання, коли справедлива теорема Ельсгольца, призводить до сильно нелінійного рівняння виду

$$(1 + Ak\tau - 2k\tau y) \frac{dy}{dt} + \tau^2 \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 = ky(A - y), \quad (16)$$

яке містить три нелінійні члени різного типу.

Нелінійність систем та процесів завжди викликає непередбачувані властивості та особливості їхньої поведінки, у тому числі – існування різних особливих та критичних параметрів і відповідних режимів роботи систем. Можливі точки біфуркації, в яких система різко перескакує з одного режиму на інший (як правило, зовсім відмінний від попереднього), аттракторів (притягуючих множин траєкторій у фазовому просторі руху системи, до яких всі інші траєкторії наближуються за будь-яких початкових умов), та інші особливості.

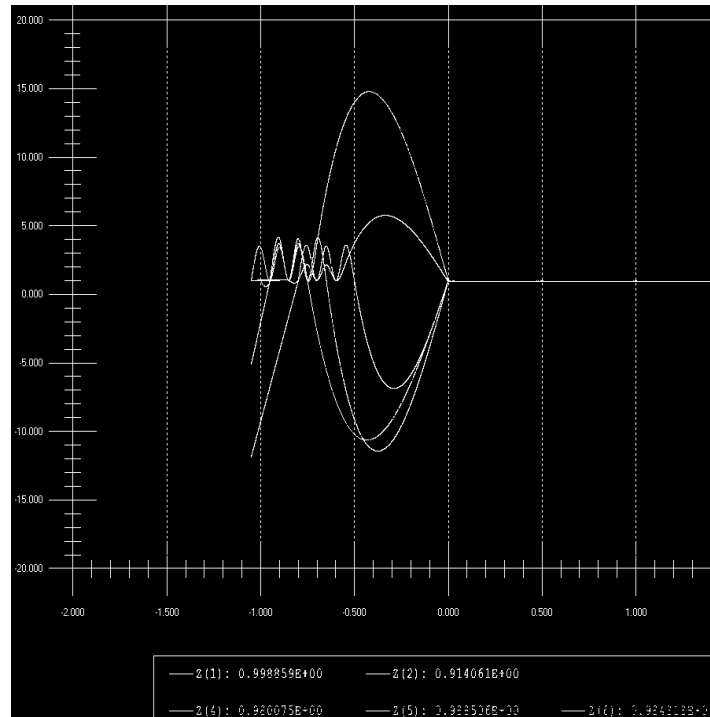
Дослідження нелінійних особливостей поведінки систем (15), (16) в багатьох випадках є конче важливим для розуміння особливостей їх поведінки, які можуть бути сильно непередбачуваними. Так, знаючи основні критичні режими та відповідні їх параметри і закони управління ними, можна спробувати оптимізувати систему і запобігти попаданню об'єкта у критичні стани, як показано на деяких порівняно простих прикладах вище.

Складні системи з великою кількістю визначальних параметрів та індивідуальних значень можливих запізнень та випереджень складно досліджувати вищеописаним способом, але загальні закономірності будуть схожими на якісному рівні і їх треба враховувати. Наприклад, агрегована математична модель потенційно небезпечного об'єкта ядерної енергетики (подібні математичні моделі можуть бути розроблені також для інших об'єктів) має наступний вигляд [2-7]:

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= [b_{10} + b_{11}z_1(t - \tau_{11}) + b_{12}z_2(t - \tau_{12}) + b_{13}z_3(t - \tau_{13})]z_1(t - \tau_{10}), \\ \frac{dz_2}{dt} &= [b_{20} + b_{21}z_1(t - \tau_{21}) + b_{22}z_2(t - \tau_{22}) + b_{23}z_3(t - \tau_{23})]z_2(t - \tau_{20}), \\ \frac{dz_3}{dt} &= [b_{30} + b_{31}z_1(t - \tau_{31}) + b_{32}z_2(t - \tau_{32}) + b_{33}z_3(t - \tau_{33}) + b_{34}z_4(t - \tau_{34}) + \\ &\quad + b_{35}z_5(t - \tau_{35}) + b_{36}z_6(t - \tau_{36})]z_3(t - \tau_{30}), \\ \frac{dz_4}{dt} &= [b_{40} + b_{43}z_3(t - \tau_{43}) + b_{44}z_4(t - \tau_{44}) + b_{45}z_5(t - \tau_{45}) + b_{46}z_6(t - \tau_{46})]z_4(t - \tau_{40}), \\ \frac{dz_5}{dt} &= [b_{50} + b_{53}z_3(t - \tau_{53}) + b_{54}z_4(t - \tau_{54}) + b_{55}z_5(t - \tau_{55}) + b_{56}z_6(t - \tau_{56})]z_5(t - \tau_{50}), \\ \frac{dz_6}{dt} &= [b_{60} + b_{61}z_1(t - \tau_{61}) + b_{62}z_2(t - \tau_{62}) + b_{63}z_3(t - \tau_{63})]z_6(t - \tau_{60}), \end{aligned} \quad (17)$$

де  $\tau_{ij}$  - часові запізнення для відповідних параметрів з такими індексами, які у більш загальному вигляді також, у свою чергу, залежать від часу (і можливо – між собою). Тут  $z_i$ - параметри системи,  $b_{ij}$ - коефіцієнти математичної моделі, які визначаються для кожної моделі за результатами її функціонування методами ідентифікації.

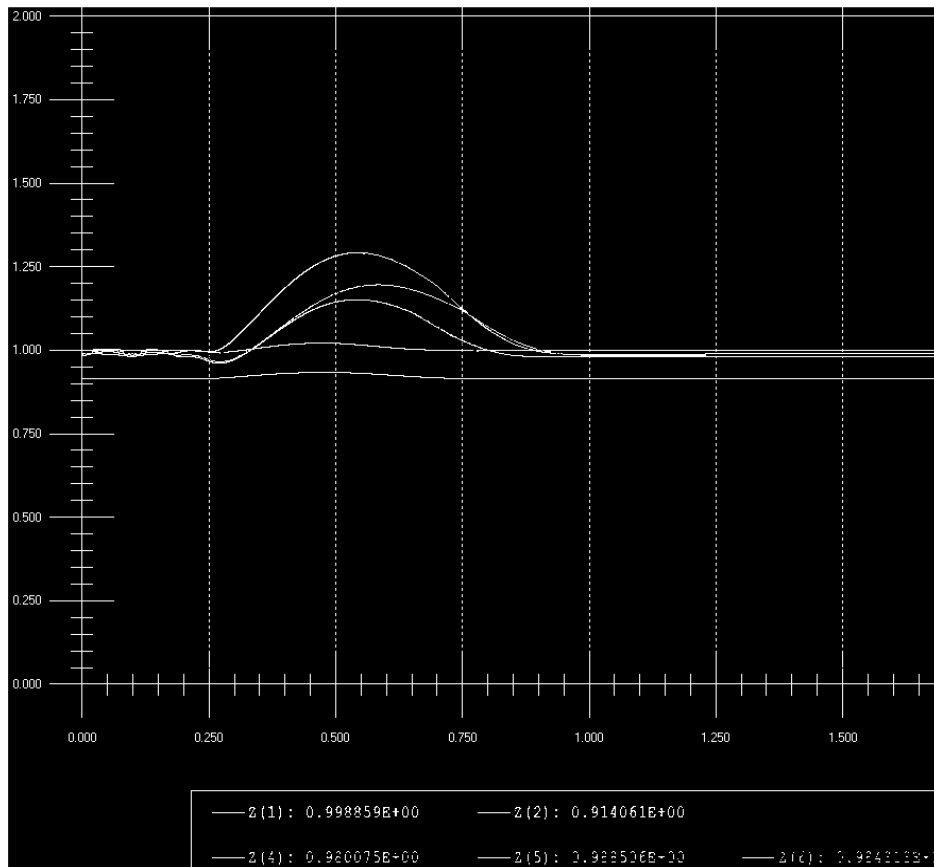
Система диференціальних рівнянь (17) значно складніша від вище розглянутих рівнянь типу (15), (16) і не дозволяє проводити аналіз критичних рівнів описаними методами. Вона досліджувалась чисельно. З Мал. 4-6 видно, що режими можуть бути критичними і катастрофічними, і виявлення параметричної залежності та особливостей значно складніше, ніж вищеописане, де зрозумілі основні особливості.



Мал. 4. Коливальні процеси в системі розвитку ядерного енергетичного об'єкта за агрегованою моделлю

**Висновки з проведених досліджень** можна зробити наступні. Розроблені агреговані математичні моделі складних об'єктів для різноманітних застосувань, з урахуванням впливу відхиляючих аргументів та нелінійних ефектів, дозволяють досліджувати особливості об'єктів шляхом комп'ютерного моделювання. Так, можна встановити деякі негативні впливи об'єкта на оточуюче природне середовище та людей, можливі шляхи послаблення негативних дій та їх ліквідації, визначити особливості динаміки розвитку об'єкта, зміни культури безпеки на ньому та можливості її підвищення. Побудова та дослідження агрегованих динамічних моделей на ЕОМ може бути корисною також для вивчення питання про тактичне та стратегічне керування об'єктами різних рівнів (підприємство, галузь чи просто складний технічний пристрій, тощо).

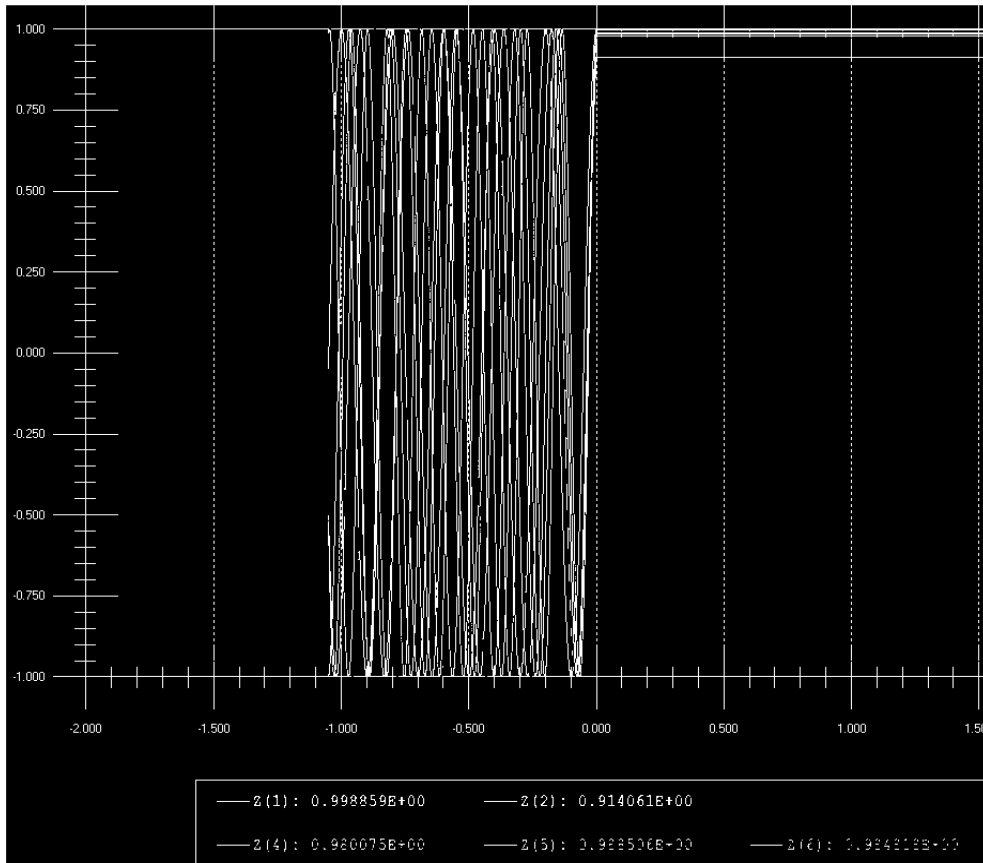
Результати ситуаційного комп'ютерного моделювання в широкому діапазоні варіюваних параметрів з урахуванням зсувних аргументів дозволяють виявити та дослідити деякі особливо важливі режими та явища, як оптимізуючого плану, так і небезпечні для розвитку і функціонування об'єкта. Виявлені критичні режими і катастрофічні ситуації та сценарії, за якими система може потрапити до них, повинні бути вивчені особливо ретельно з метою їх неприпущення у реальному об'єкті, який досліджується шляхом такого моделювання.



Мал. 5. Коливальні процеси в системі розвитку ядерного енергетичного об'єкта за агрегованою моделлю

В статті розглянуто подібні підходи та шляхи їх реалізації. В результаті представлених в даній роботі методології моделювання та аналізу одержаних даних, моделювання складних систем з відхиляючими аргументами показано, як знання про динаміку розвитку об'єктів дозволяє систематизувати дані про критичні ситуації та взаємний вплив різних параметрів один на одного, при яких різні небажані чи навіть катастрофічні явища стають можливими. Для багатьох випадків складні системи не дозволяють будувати їх точні детерміновані математичні моделі, тому для них застосування методики моделювання шляхом побудови агрегованих моделей на основі статистичних даних та загальних якісних властивостей дозволяє виявити важливі параметри та зв'язки між ними.

На прикладі розвитку фінансової системи показано варіант керування розвитком між стратегіями з запізненнями та випередженнями на основі їх кусково-неперервного узгодження, коли початок розвитку починається з вибраним темпом, який зберігається до досягнення критичного рівня при збільшенні запізнення з плином часу, після чого режим переключється на критичну криву траєкторії, яка відповідає стратегії розвитку з випередженням. І так постійно йде переключення між стратегіями з запізненням та випередженням.



Мал. 6. Графіки функцій  $z_i$  (розрахункові для  $t > 0$ ) та їх інтерпольовані значення для інтервалу часу до початкового моменту ( $t < 0$ )

За результатами розглянутого в даній роботі дивує те, що досі мало використовують показані особливості керування розвитком систем. Наприклад, фінансово-банківські та інвестиційні проекти рідко чи майже не досліджуються подібним чином, тоді як це більш важлива тема, ніж, наприклад, тільки інформаційне забезпечення чи комп'ютеризація для досягнення більш зручного та швидкого користування базами даних і управління.

### Література

1. Жирмунский А.В., Кузьмин В.И. Критические уровни в развитии природных систем. Л.: Наука, 1990, 223с.
2. Kazachkov I.V., Chesnokov Ye.V. and Kazachkova O.M. *Modelling of Potentially Hazardous Objects with Time Shifts*// WSEAS Trans. on Business & Economics. 2004, Issue3, №1, p. 37-43.
3. Jamshid Gharakhanlou, Ivan V. Kazachkov, Oleksandr V. Konoval. Development and Investigation of the Mathematical Models for Potentially Hazardous Nuclear Power Objects with Deviated Arguments// WSEAS Trans. on Applied and Theoretical Mechanics.- 2013.- Vol. 8.- Issue 4.- P. 241-257.

4. Jamshid Garakhanlou, I.V. Kazachkov. Mathematical modeling of potentially hazardous nuclear power objects with shifted arguments// *J. Nuclear and Radiation Safety*.- 3 (55) .- 2012.- P. 21-26.
5. Jamshid Garakhanlou, I.V. Kazachkov. Development and Investigation of Aggregate Models for Nuclear Objects with Time Shifts// *J. Nuclear and Radiation Safety*.- 2 (54) .- 2012.- P. 36-41.
6. Джамшид Гараханлу, О.В. Коновал, І.В. Казачков. До розробки математичних моделей складних об'єктів зі зсувними аргументами// *Фізико-математичні записки*.– Ніжин 2013 – С. 3-12.
7. Jamshid Gharakhanlou, Oleksandr V. Konoval, Ivan V. Kazachkov. About development of the aggregate mathematical models for complex non-linear systems with deviated arguments// *Recent advances in mathematical methods, mathematical models and simulation in science and engineering - Interlaken, Switzerland 2014*.– P. 42-47.
8. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию уравнений с отклоняющимися аргументами.- Москва: Наука.- 1971.- 296 с.
9. Allen P.M. Evolution, Population Dynamics and Stability/ *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*.- 1976.- March.- Vol.73.- No.3.- P.665-668.
10. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов.- Москва: Наука.- 1976.- 367 с.
11. Пименов В.Г. Функционально-дифференциальные уравнения: численные методы.- Екатеринбург: УрГУ.- 1998.- 237 с.
12. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.- М.: Наука.- 1991.- 297 с.
13. Baker C.T.H., Paul C.A.H., Wille D.R. Issues in the numerical solution of evolutionary delay differential equations// *Advances in Comput. Math*.- 1995.- V. 3.- P. 171-196.
14. Yan J. Oscillation of first-order impulsive differential equations with advanced argument// *Computers and Mathematics with Applications*.- 2001.- V. 42.- N 6.- P. 1353-1363.
15. Хусаїнов Д.Я., Коварж І.В. Розв'язок одновимірного рівняння теплопровідності із запізненням// *Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки*.- 2004.- №2.- С. 362-368.
16. Самойленко А.М., Стельмашук Л.В. Періодичні розв'язки автономних диференціальних рівнянь із запізненням// *Нелінійні коливання*.– 2000.– 3, №4.– С. 526–534.
17. Hansheng Wu. Adaptive robust control of uncertain nonlinear systems with nonlinear delayed state perturbations// *Automatica*.- 2009.- V. 45.- P. 1979-1984.
18. Yanlai Liang, Lijie Li, Lansun Chen. Almost periodic solutions for Lotka–Volterra systems with delays// *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*.- 2009.- V. 14.- P. 3660–3669.
19. Svante Björklund, Lennart Ljung. An improved phase method for time-delay estimation// *Automatica*.- 2009.- V. 45.- P. 2467-2470.
20. Guirong Jiang, Qigui Yang. Complex dynamics in a linear impulsive system// *Chaos, Solitons and Fractals*.- 2009.- V. 41.- P. 2341–2353.
21. Yuanliang Zhang, Jae Byung Park, Kil To Chong. Controller design for nonlinear systems with time delay using model algorithm control (MAC)// *Simulation Modelling Practice and Theory*.- 2009.- V. 17.- P. 1723–1733.
22. Jian-Qiao Sun, Bo Song. Control studies of time-delayed dynamical systems with the method of continuous time approximation// *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*.- 2009.- V. 14.- P. 3933–3944.
23. S.M. Lee, Ju H.Park. Delay-dependent criteria for absolute stability of uncertain time-delayed Lur'e dynamical systems// *Journal of the Franklin Institute*.- 2010.- N 347.- P. 146–153.
24. Liping Wen, Wansheng Wang, Yuexin Yu. Dissipativity and asymptotic stability of nonlinear neutral delay integro-differential equations// *Nonlinear Analysis*.- 2010.- V. 72.- P. 1746-1754.
25. P. Pue-on, S.V. Meleshko. Group classification of second-order delay ordinary differential equations// *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*.- 2010.- V. 15.- P. 1444–1453.

26. Rajeev K. Azad, J. Subba Rao, Ramakrishna Ramaswamy. Information-entropic analysis of chaotic time series: determination of time-delays and dynamical coupling// Chaos, Solitons and Fractals.- 2002.- V. 14.- P. 633–641.
27. Бегун В.В., Бегун С.В., Широков С.В., Казачков І.В., Литвинов В.В., Письменний Є.М. Культура безпеки на ядерних об'єктах України. Навчальний посібник.- Київ.- 2012.- 386 с.

УДК 530.145.6

## МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ПАРАМЕТРИЧНИХ ПОЗДОВЖНЬО-КРУТИЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ОБЕРТОВОГО СТРИЖНЯ ТА ЯВИЩЕ РЕВЕРСУ

І.В. Казачков

**Актуальність проблеми.** Відомі численні способи параметричного збудження і пригнічення коливань в суцільних середовищах [1-14], зокрема, в рідких: наприклад, фізика поверхневих явищ і тонких плівок. Інтенсивний розвиток сучасної промисловості і техніки вимагає дослідження параметрично збуджуваних (обумовлених періодичною силою, що змушує) або просто параметричних коливань в суцільних середовищах: динамічна стійкість пружних систем, коливання пластин, оболонки, стержнів, коливання рідин у віброуючих посудинах, в трубопроводах, насосах і т.д. Нові напрями в сучасному природознавстві з'явилися в зв'язку з дослідженням нелінійних процесів різної фізико-механічної і хімічної природи: термогідродинамічні і магнітогідродинамічні нестійкості, катастрофи, біфуркації, автоколивання і т.д.

Побудова адекватних фізико-математичних моделей параметричних коливань середовищ і процесів, що відбуваються в них, пошук способів ефективного впливу на ці процеси, управління ними - одне з найбільш важливих завдань сучасної механіки суцільних середовищ.

**Постановка задачі.** Дана стаття присвячена математичному моделюванню та аналізу особливостей поведінки параметричних нелінійно зв'язаних параметричних поздовжньо-крутильних коливань обертового стрижня. Подібні задачі мають важливе значення для багатьох практичних застосувань, зокрема, в приладах точної механіки, принтерах і т.п. Так, в Інституті кібернетики АН УРСР (Київ) за участю начальника відділу Г.О. Гурвича і провідних фахівців В.С. Ленчука, В.В. Базилевича, П.Г. Шишкіна був виконаний комплекс робіт в області розробки елементів і систем з імпульсною краплеструменевою реєстрацією інформації; були успішно розроблені та виготовлені малогабаритні односоплові і многосоплові друкуючі головки, швидкокодуючі мікропроцесорні системи управління, пристрої одноколірного і кольорового друку, призначені для використання в складі малих ЕОМ, термінальних станцій і факсимільної цифрової апаратури [15]. На початку 1990-х нами був придбаний у них недорогий принтер, що використовувався для високоякісного кольорового друку.

**Математична модель параметричних нелінійно зв'язаних поздовжньо-крутильних коливань обертового стрижня.** Розглядається наступна модель пружних коливань стрижня. Вали, що обертаються з насадженими дисками, використовуються в якості моделі для розрахунку крутильних коливань двигунів. З теорії скінчених переміщень нелінійні співвідношення, що зв'язують їх з пружними деформаціями [16-18] мають наступний вигляд в декартовій системі координат  $x, y, z$  :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}, \end{aligned} \quad (1)$$



$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}.$$

В рівнянні (1) маємо  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  – елементи нормальних та  $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$  – дотичних компонент тензора деформацій. А  $\{u, v, w\}$  – компоненти вектора переміщень за відповідними координатами. У разі обертання кругового циліндра довжини  $\ell$  з постійним розподіленим напруженням уздовж осі циліндра  $x$ , при збереженні форми поперечних перерізів:

$$v = -y(1 - \cos \varphi) - z \sin \varphi, \quad w = -z(1 - \cos \varphi) + y \sin \varphi. \quad (2)$$

де  $\varphi$  – кут закручування. Підставивши ці вирази в рівняння деформацій-переміщень і поклавши  $\rho = \sqrt{y^2 + z^2}$ , отримаємо:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho^2 \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0, \quad \gamma_{xy} = -z \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = 0, \quad \gamma_{zx} = y \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \gamma = \sqrt{\gamma_{xy}^2 + \gamma_{zx}^2}. \quad (3)$$

Приймається лінійне співвідношення між напруженнями і деформаціями. Поздовжнє напруження  $\varepsilon$ :  $\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x (1 + O(\varepsilon_x^2))$ , а результуюче напруження зсуву:

$$\tau = G \cdot \gamma \cdot \left[ 1 + \frac{2}{3} \gamma_2 \gamma^2 + \frac{4}{9} \gamma_4 \gamma^4 + O(\gamma^6) \right], \quad (4)$$

де  $E$  – модуль пружності,  $G$  – модуль зсуву,  $\gamma_2, \gamma_4$  – фізичні константи матеріалу, що визначаються експериментально,  $O(\xi)$  – величина порядку  $\xi$ , для оцінки похибки.

**Управління параметричними коливаннями стрижня.** В управління руху системи (1) – (4) входять пружні відновлюючі сили, створювані цими напруженнями. Нехай  $F$  – площа поперечного перерізу, а  $r$  – радіус циліндра; тоді пружна сила становить:

$$R_1 = \int_F \sigma_x dF = E \cdot F \cdot \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} E \cdot F \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{1}{4} r^2 \cdot E \cdot F \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + O \left[ \left| \frac{du}{dx} \right|^3 + \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^6 \right]. \quad (5)$$

Якщо ввести полярний момент інерції  $I_0 = 0,5\pi \cdot r^4$  поперечного перерізу і нові константи матеріалу наступні:  $\Gamma_2 = 4/9\gamma^2$  і  $\Gamma_4 = 4/9\gamma^4$ , то пружний крутильний момент буде:

$$R_2 = \int_F \tau \rho dF + R_z = GI_0 \left[ \frac{d\varphi}{dx} + r^2 \Gamma_2 \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^3 + r^4 \Gamma_4 \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^5 \right] + O \left[ \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^7 \right] + R_z, \quad (6)$$

де  $R_z$  – додатковий крутильний момент, обумовлений поворотом простих сил  $\sigma_x, dF$ , породжуваних взаємодією окремих волокон. При цьому повороті двох площин поперечного перерізу з'являються складові  $\delta_x \rho dF \cdot d\varphi / dx$ , перпендикулярні радіусу  $\rho$ , які створюють момент:

$$R_z = \int_F \sigma_x dF \frac{d\varphi}{dx} \rho^2 = EI_0 \frac{d\varphi}{dx} \left\{ \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{1}{3} r^2 \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + O \left[ \left| \frac{du}{dx} \right|^3 + \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^6 \right] \right\}. \quad (7)$$

Поздовжнє переміщення і кут закручування вала  $\varphi$  на вільному кінці (а значить і диска) задовольняють рівнянням:

$$du / dx = u / \ell, \quad d\varphi / dx = \varphi / \ell. \quad (8)$$

Масою та моментом інерції валу нехтуємо порівняно з масою  $\mu$  та моментом інерції диску  $\theta$ , так що кінетична енергія дорівнює:  $T = 0,5\mu(u')^2 + 0,5\theta(\dot{\varphi})^2$ , де штрихом позначено диференціювання за часом.

Далі рівняння Лагранжа другого роду для недемпфованих вільних коливань стрижня записуються у вигляді:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial u'_v} \right) - \frac{\partial \Gamma}{\partial u_v} + R_0 = 0, \quad v = 1, 2, \quad u_1 = u, \quad u_2 = u, \quad (9)$$

звідки з урахуванням (5)-(9) виходить:

$$\mu u'' + E \cdot Fu / \ell + 0,5E \cdot Fu^2 / \ell^2 + 0,25r^2 E \cdot F \varphi^2 / \ell^2 + O(|u|^3 + \gamma^6) = 0, \quad (10)$$

$$\theta \varphi + G \dot{I}_0 \varphi / \ell + r^2 \dot{I}_0 / \ell^3 = (G \Gamma_2 + 1/3 \cdot E) \varphi^3 + E \dot{I}_0 u \varphi / \ell^2 + r^4 G \dot{I}_0 \Gamma_4 \varphi^5 / \ell^5 + 0,5E \dot{I}_0 u^2 \varphi / \ell^3 + O(|u^3 \varphi| + |\varphi^7|).$$

**Власні та параметрично збуджувані коливання системи.** Друге рівняння в системі (10) описує власні крутильні коливання. Оскільки поздовжнє переміщення  $u$  входить тільки разом з кутом закручування  $\varphi$ , воно зручне для отримання оцінок. Нехтуючи в першому рівнянні математичної моделі (10) величини порядку  $u^2, \varphi^4$ , а в другому - величини порядку  $u^2 \varphi, \varphi^5$ , відповідно, отримуємо рівняння руху, що служать основою для подальшого дослідження:

$$\mu u'' + E \cdot Fu / \ell + 0,25r^2 E \cdot Fu^2 / \ell^2 \cdot \varphi^2 = 0, \quad \theta \varphi'' + G \dot{I}_0 \varphi / \ell + r^2 \dot{I}_0 / \ell^3 (G \Gamma_2 + 1/3 \cdot E) \varphi^3 + E \dot{I}_0 u \varphi / \ell^2 = 0. \quad (11)$$

З урахуванням першого рівняння системи (11) та дисипативних втрат у стрижні (коефіцієнт втрат  $\gamma$  дорівнює відношенню енергії  $\Delta W$ , що поглинається елементарним об'ємом стрижня за період коливань  $T = 2\pi / \omega$ , до потенційної енергії пружної деформації  $W$ ,  $\gamma = \Delta W / 2\pi\omega$ ), виходить наступне рівняння:

$$\theta_s \cdot \varphi'' + G \cdot \dot{I}_0 \varphi / \ell + \left\{ r^2 \dot{I}_0 / \ell^3 (G \cdot \Gamma_2 + 1/3 \cdot E) + \frac{(-1)r^2 E^2 \dot{I}_0 \cdot F}{4\ell^4 \sqrt{(E \cdot F / \ell - \mu_s \omega^2)^2 + (E \cdot F \gamma / \ell)^2}} \right\} \varphi^3 = 0. \quad (12)$$

Тут  $\theta_s = \theta_d + \theta_r$  - сумарний момент інерції стрижня і диска;  $\mu_s$  - сумарна маса (стрижня і диска);  $\mu_s = \mu_d + \mu_r$ .

**Нелінійність рівнянь та резонансні режими.** Рівняння руху (11), (12) нелінійні щодо переміщень. Члени з характеристиками матеріалу  $\Gamma_2, \Gamma_4$  мають нелінійне співвідношення між напруженнями і деформаціями, тобто відображають фізичну нелінійність, тоді як інші нелінійні вирази зумовлені геометрією деформації, встановлюють зв'язок кута повороту і поздовжнього переміщення. Вплив нелінійності двох видів можливо порівняти на прикладі рівняння (12). Так, для сталі Сіменс Мартін масмо  $\gamma_2 = -8,5 \cdot 10^4$  і  $\Gamma_2 = -3,8 \cdot 10^4$ , а тому в області далеко від резонансу  $\mu_s \omega^2 \neq E \cdot F / \ell$ , множник при  $\varphi^3$  визначається здебільшого фізичною нелінійністю. А під впливом геометричної нелінійності змінюється приблизно на 0,002 %. Але при підході до резонансу ( $\omega^2 \rightarrow E \cdot F \ell / \mu_s$ ) внесок від геометричної нелінійності може зростати залежно від величини  $\gamma$ , яка може бути визначена з площі петлі гістерезису матеріалу стрижня при його циклічному деформуванні. Величина пружного крутного моменту може визначатися з (6), (7) після рішення рівняння (12), що має точне рішення через еліптичні функції Якобі.

**Випадок довгих хвиль та врахування розподіленості системи і умов узгодженості.** У випадку довгих хвиль, якщо розміри стрижня  $\ell \sim \lambda$ , слід враховувати хвильові процеси у міру поширення хвилі від генератора до диска, тобто слід враховувати розподіленість системи: вал (стрижень) - диск, який взаємодіє з генератором, а це призведе до деякої зміни резонансних умов взаємодії генератора з механічною розподіленою системою. Хвильові процеси в стрижні змінять навантаження, прикладене до генератора коливань.

Зміняться також умови узгодження. Це все можна врахувати в рамках лінійної теорії поширення хвилі вздовж стрижня. Тоді замість  $\left[ (E \cdot F / \ell - \mu_s \omega^2)^2 + (E \cdot F \gamma / \ell)^2 \right]^{-0,5}$  в рівнянні (12) буде наступне:

$$\left\{ \left[ (E \cdot F / \ell - \mu_s \omega^2) + \mu_s \omega^2 a_1 \right]^2 + (E \cdot F \gamma / \ell + \mu_s \omega^2 d_1)^2 \right\}^{-0.5}, \quad (13)$$

де  $a_1, d_1$  - хвильові коефіцієнти, що враховують властивості матеріалу.

Якщо на одній границі ( $x = 0$ ) стрижень (хвильопровідне середовище, хвильопровід) підлягає дії гармонічного коливання на частоті  $\omega$  генератора, а на іншій – вільна поверхня (площина диску), то для  $a_1, d_1$  буде

$$a_1 = - \frac{\alpha \cdot sh(2\alpha\ell) + \beta \cdot \sin(2\beta\ell)}{\ell(\alpha^2 + \beta^2)[ch(2\alpha\ell) + \cos(2\beta\ell)]}, \quad d_1 = \frac{\alpha \cdot \sin(2\alpha\ell) - \beta \cdot ch(2\alpha\ell)}{\ell(\alpha^2 + \beta^2)[ch(2\alpha\ell) + \cos(2\beta\ell)]}. \quad (14)$$

Де  $\alpha = \frac{\omega}{c_e} \sqrt{\frac{\sqrt{1+\gamma^2}-1}{2(1+\gamma^2)}}$ ,  $\beta = \frac{\omega}{c_e} \sqrt{\frac{\sqrt{1+\gamma^2}+1}{2(1+\gamma^2)}}$ . Коефіцієнт  $\gamma$ , що характеризує відносне

розсіювання енергії за цикл сталих коливань з амплітудою відповідною до значення потенційної енергії пружної системи, може бути пов'язаний з логарифмічним декрементом коливань співвідношенням  $\delta : \gamma = 2\delta$ .

У випадку наявності у розподіленій системі концентратора коливань вираз (13) домножується на  $M^3$  - коефіцієнт підсилення коливань ( $u \sim \varphi^2$ ). Також, при переході через резонанс  $\omega_0^2 = E \cdot F / (\mu\ell)$  (для поздовжніх хвиль) є характерна особливість зміни різниці фаз  $\psi$  між коливанням (поздовжнім) та збуджуючою силою при зміні частоти останньої. Ця різниця завжди від'ємна, тобто коливання «запізнюється» відносно зовнішньої сили. Так, при  $\omega < \sqrt{E \cdot F / (\mu\ell)}$ ,  $\psi \rightarrow 0$ , а при  $\omega > \sqrt{E \cdot F / (\mu\ell)}$ ,  $\psi \rightarrow -\pi$ . Зміна  $\psi$  від 0 до  $-\pi$  відбувається у вузькій області частот ( $\sim \gamma$ ), близьких до  $\omega_0 = \sqrt{E \cdot F / (\mu\ell)}$ . При  $\omega = \omega_0$  різниця фаз  $\psi = -\pi/2$ . За відсутності тертя зміна фази вимушених коливань на  $\pi$  відбувається скачком при  $\omega = \omega_0$ . Врахування тертя «розмазує» цей скачок.

Відзначимо, що для сталей коефіцієнт, враховуючи фізичну нелінійність матеріалу,  $\gamma_2 = 8,5 \cdot 10^4$ . Тоді  $\Gamma_2 = -3,8 \cdot 10^4$ . Поблизу резонансу рівнянь для  $\varphi$  в нелінійному члені  $\sim \varphi^3$  буде містити, з урахуванням усього сказаного і поправки на зсув фаз коливань,  $\psi, r$  коефіцієнт посилення коливань за рахунок наявності концентратора. Наведемо вид цього рівняння:

$$\theta_s \cdot \varphi''' + GI_0 \varphi / \ell + \left\{ r^2 \dot{I}_0 / \ell^3 (G \cdot \Gamma_2 + 1/3E) + \frac{(-r^2) E^2 \dot{I}_0 F M^3 \cos \varphi}{4\ell^4 \sqrt{\left[ (E \cdot F \gamma / \ell - \mu \omega^2) + \mu \omega^2 a_1 \right]^2 + \left[ E \cdot F \gamma / \ell + \mu \omega^2 d_1 \right]^2}} \right\}, \quad (15)$$

де

$$\sin \psi = \frac{E \cdot F \gamma / \ell + \mu \omega^2 d_1}{\sqrt{\left[ (E \cdot F / \ell - \mu \omega^2) + \mu \omega^2 a_1 \right]^2 + \left[ E \cdot F \gamma / \ell + \mu \omega^2 d_1 \right]^2}}. \quad (16)$$

**Перевірочний розрахунок та дослідження можливості реверсу коливань** проведемо для умов резонансу за формулами (15), (16), які припускають зміну знаку коефіцієнта при  $\varphi$ , що має дуже важливе значення, оскільки це і означає можливість реверсу коливань. Це - нове явище, винайдене з отриманої математичної моделі та проведеного аналізу нелінійної поведінки параметричних пов'язаних поздовжньо-крутильних коливань обертового стрижня. Воно може бути сформульоване наступним чином: *існує режим, при якому параметрична дія у вигляді поздовжніх коливань на один з кінців стрижня (наприклад, періодичні удари в торець*

з певною частотою) може призводити до обертових коливань за рахунок нелінійного параметричного зв'язку коливань.

Такий режим реверсу можна використовувати в різних приладах, наприклад, пристроях точної механіки, де стрижень має обертатись як за часовою стрілкою, так і проти неї, гасіння коливань стрижня ударною дією на його кінці, і тому подібне. Досить цікаве нове явище з можливістю практичних застосувань у приладах і технічних пристроях.

В околі резонансу коефіцієнт при  $\varphi^3$  може бути представлений у формі:

$$H = \frac{r^2 \dot{I}_0}{\ell^3} \left( G \cdot \Gamma_2 + \frac{1}{3} E \right) + \frac{(-r^2 E^2 \dot{I}_0 \cdot F) M^3 \cos \psi}{4\ell^4 \sqrt{(\mu \omega^2 a_1)^2 + (E \cdot F \gamma / \ell + \mu \omega^2 d_1)^2}}. \quad (17)$$

Якщо знехтувати ефекти розподіленості пружних дисипативних та інерційних властивостей і інерційної хвильової частини системи стрижень-вал, то:

$$H = \frac{r^2 \dot{I}_0}{\ell^3} \left( G \cdot \Gamma_2 + \frac{1}{3} E - \frac{E \cdot M^3 \cos \psi}{4\gamma} \right). \quad (18)$$

Оскільки для резонансу  $\cos \psi \rightarrow \text{sign} \left[ \omega - \sqrt{E \cdot F / (\mu \ell)} \right]$ , то з (18) виходить:

$$H = \frac{r^2 \dot{I}_0}{\ell^3} \left( G \Gamma_2 + \frac{1}{3} E + \frac{E \cdot M^3}{4\gamma} \text{sign} \left[ \omega - \sqrt{\frac{E \cdot F}{\mu \ell}} \right] \right). \quad (19)$$

З огляду на те, що  $\Gamma_2 < 0$ , з (19) видна можливість зміни знака  $H$  поблизу поздовжнього резонансу стрижня. У розрахунку вважаємо  $M = 5$ , а для коефіцієнта використовуємо дані академіка Г.С. Писаренка із співробітниками, що наведені для деяких марок сталей в Таблиці:

Марка сталі	$E, \text{Н/м}^2$	$\text{Н/м}^2$	%
ШХ 9	$2,195 \cdot 9,8 \cdot 10^{10}$	$0,85 \cdot 9,8 \cdot 10^{10}$	0,09(I) 0,04(II)*
ЗХІЗ	$2,2 \cdot 9,8 \cdot 10^{10}$	$0,87 \cdot 9,8 \cdot 10^{10}$	0,66(I)
	$2,2 \cdot 9,8 \cdot 10^{10}$	$0,87 \cdot 9,8 \cdot 10^{10}$	0,07(II)***
	$2,14 \cdot 9,8 \cdot 10^{10}$	$0,85 \cdot 9,8 \cdot 10^{10}$	0,069(III)
X17H2	$2,1 \cdot 9,8 \cdot 10^{10}$	$0,85 \cdot 9,8 \cdot 10^{10}$	0,075(IV)***

\* - після віджигання ( $H_B = 184$ ); - після нагрівання до  $840^\circ \text{C}$ , витримки протягом 1 години, загартування в маслі, відпускання від  $150^\circ \text{C}$ , витримки протягом 3 год., на повітрі ( $H_B = 449$ ).

\*\* I - стан поставки ( $H_B = 185$ );

II - після термообробки до  $H_{RC} = 45-50$ ;

III - після термообробки до твердості  $H_{RC} = 50-55$ ;

\*\*\* IV - після термообробки до твердості  $H_{RC} = 40-45$ ;

Так, для сталі марки ШХ9 /II/ при  $\gamma = 0,0008 = 8 \cdot 10^{-4}$  маємо:

$$H = \frac{r^2 I_0}{\ell^3} \left\{ 0,85 \cdot 9,8 \cdot 10^{10} (-8,5 \cdot 10^4) + \frac{2,195 \cdot 9,8 \cdot 10^{10}}{3} - \frac{2,195 \cdot 9,8 \cdot 10^{10} \cdot 5^3}{4,8 \cdot 10^{-4}} \right\}, \quad \omega < \sqrt{\frac{EF}{\mu \ell}}.$$

Основний внесок в  $H$  визначають I і III члени у фігурних дужках. При  $\omega < \omega_0$ ,  $H < 0$ . Очевидно, при  $\omega > \omega_0$  останній член в у фігурних дужках для  $H$  поміняє знак на протилежний і  $H > 0$  стає при  $\omega > \omega_0$ . Тож це і є можливість реверсу крутильних коливань стрижня.

**Висновки з проведених досліджень** можна зробити наступні. В результаті застосування побудованої математичної моделі досліджені нелінійні процеси у системі пов'язаних поздовжньо-крутильних параметричних коливань обертового стрижня та режим резонансу нелінійних коливань. Проведений розрахунок дозволив знайти співвідношення параметрів, які припускають зміну знаку коефіцієнта при члені, який визначає можливість реверсу крутильних коливань. Таким чином, відкрито і досліджене нове явище реверсу крутильних коливань за рахунок пов'язаних поздовжньо-крутильних параметричних коливань обертового стрижня, яке може мати різноманітні практичні застосування. Наприклад, його можна використовувати у приладах точної механіки, як особливий режим, при якому параметрична дія у вигляді поздовжніх коливань на одному з кінців стрижня (наприклад, періодичні удари в торець з певною частотою) має призводити до обертових коливань за рахунок нелінійного параметричного зв'язку коливань. За умов реверсу можна керувати не тільки параметрами, але й напрямом обертання.

**Анотація.** Стаття присвячена дослідженню нелінійних ефектів у системі пов'язаних поздовжньо-крутильних параметричних коливань обертового стрижня. Побудована та досліджена математична модель, на основі якої проведено розрахунок умов резонансу нелінійних коливань і знайдено співвідношення параметрів, які припускають зміну знаку коефіцієнта при члені, який визначає можливість реверсу крутильних коливань. Останнє - нове явище, особливий режим, при якому параметрична дія у вигляді поздовжніх коливань на одному з кінців стрижня (наприклад, періодичні удари в торець з певною частотою) може призводити до обертових коливань за рахунок нелінійного параметричного зв'язку коливань. За умов реверсу це призводить до керування не тільки параметрами обертання, але й напрямку обертання, тобто можливі крутильні осциляції, які можна використовувати у приладах точної механіки.

**Анотация.** Статья посвящена исследованию нелинейных эффектов в системе связанных продольно-крутильных параметрических колебаний вращающегося стержня. Построена и исследована математическая модель, на основе которой проведен расчет условий резонанса нелинейных колебаний и найдено соотношение параметров, которое предполагают изменение знака коэффициента при члене, определяющем возможность реверса крутильных колебаний. Последнее - новое явление, особый режим, при котором параметрическое действие в виде продольных колебаний на одном из концов стержня (например, периодические удары в торец с определенной частотой) может приводить к крутильным колебаниям за счет нелинейной параметрической связи колебаний. В условиях реверса это приводит к управлению не только параметрами вращения, но и направлением вращения, то есть возможны крутильные осцилляции, которые можно использовать в приборах точной механики.

**Abstract.** The article is devoted to investigation of nonlinear effects in a system of coupled longitudinal-torsional parametric vibrations of a rotating rod. Constructed and investigated mathematical model, based on which we calculated the resonance conditions of nonlinear oscillations and found the ratio of the parameters that require changing sign of the coefficient in front of the term defining the possible reverse of torsional vibrations. The latter is a new phenomenon, a special mode, where the parametric action in the form of longitudinal vibrations at one end of the rod (for example periodic strikes in the face with a certain frequency) can lead to torsional vibrations due to non-linear parametric interaction of oscillations. In the context of this reverse it leads to control not only the rotation parameters, but also the direction of rotation, and there are possible torsional oscillations, which can be used in precision mechanics devices.

**Література**

1. Казачков И.В. Параметрическое возбуждение и подавление колебаний на границах раздела сплошных сред/ Дис. Д-ра физ.-мат. наук.- Киев: Ин-т электродинамики АН УССР.- 1989.- 464 с.
2. Колесниченко А.Ф., Казачков И.В., Водянюк В.О., Лысак Н.В. Капиллярные МГД течения со свободными границами. Киев, Наук. думка, 1988, 176с.
3. Колесниченко А.Ф. Технологические МГД-установки и процессы. Киев, Наук. думка, 1980, 192с.
4. Колесниченко А.Ф., Гориславец Ю.М., Казачков И.В. и др. Разработать элементы теории и методы электромагнитного воздействия на технологические процессы в системах с жидкими проводниками. Киев, ИЭД АН УССР. Отчет, 1986, 90с., № Гос. рег. 01840047289.
5. Колесниченко А.Ф., Казачков И.В., Водянюк В.О. и др. Разработка и исследование конструкции генератора струйно-капельного потока диафрагмы опытного термоядерного реактора (ОТР). Киев-Ленинград-Москва, ИЭД АН УССР-НИИЭФА им. Д.В. Ефремова-ИАЭ им. И.В. Курчатова. Отчет 2-х частях, 1986, 80с., 1987, 53с.
6. Коловандин Б.А. Устойчивость течения проводящей жидкости со свободной поверхностью при наличии магнитного и электрического полей. Прикладная механика, 1965, т.1, с.95-105.
7. Арбузов В.А., Кузнецов Е.А., Носков Н.Н. и др. О параметрическом возбуждении волн на поверхности жидкости. Новосибирск, 1977, 13с. (препринт Ин-т автоматики и электрометрии, СО АН СССР, №57).
8. Березин Ю.А. Численное исследование нелинейных волн в разреженной плазме. Новосибирск, Наука, 1977, 112с.
9. Бояревич В.В., Фрайберг Я.Ж., Шилова Е.И., Щербинин Э.В. Электровихревые течения. Рига, Зинатне, 1985, 315с.
10. Брисман В.А. Параметрическая стабилизация границ раздела жидкостей. ДАН, 1976, т.226, вып.5, с.1041-1044.
11. Колебательные явления в многофазных средах и их использование в технологии. Под ред. Р.Ф. Ганиева. Киев, Техника, 1980, 142с.
12. Chandrasekhar S. Hydrodyn. and hydromagnetic stability.- Oxford.- Clarendon Press.- 1961.- 654p.
13. Peskin R., Raco R. Ultrasonic atomization of liquids// J. Acoust. Soc. Am.- 1963.- v. 35.- N 9.- P. 1378-1385.
14. Неволин В.Г. Параметрическое возбуждение поверхностных волн. ИФЖ, 1984, т. XXVII, №6, с.1028-1042. Обзор.
15. Иванов Е.Л., Степанов И.М., Хомяков КС. Периферийные устройства ЭВМ и системы. М.: Высшая школа, 1987, 320 с.
16. Блох В.И. Теория упругости. Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1964, 483 с.
17. Вольмир А.С., Куранов Б.А., Турбаивский А.Т. Статика и динамика сложных структур: Прикладные многоуровневые методы исследований, М.: Машиностроение, 1989, 248 с.
18. Кильчевский Н.А., Изберская Г.А., Киселевская Л.М. Лекции по аналитической механике оболочек, К.: Выща шк., 1974, 232 с.

УДК 514.18

**ПАРАМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ УЯВНИХ МІНІМАЛЬНИХ ПОВЕРХОНЬ****Е.О. Чернишова**

Мінімальні поверхні цікаві не лише з точки зору «чистої» математики, вони відіграють важливу роль в різних галузях науки: архітектурі, фізиці, хімії, біології тощо. Прикладами мінімальних поверхонь можуть бути добре відомі мембрани – барабанна перетинка у вусі, мембрани,

що є межами між клітинами і т.п. Їх використовують для проектування паливного баку космічного корабля, для моделювання рідких кристалів, які виникають в масляно-водній поверхнево-активній речовині мікроемульсії. У основі проектування наметів лежить принцип мінімальних поверхонь, тобто оптимізація відповідності форми, сил і маси. У мінімальних поверхнях напруження на всіх напрямках однаково. Властивості мінімальних поверхонь визначають їх переваги в проектуванні і будівництві. Тому конструюванню мінімальних поверхонь завжди приділяли увагу як з теоретичної точки зору, так із точки зору практичного застосування.

Розв'язання задач теорії мінімальних поверхонь, особливо з використанням теорії комплексних змінних, стимулює розвиток багатьох суміжних галузей математики. В свій час проблемою побудови мінімальних поверхонь займалися Монж, Вейерштрас, Ріман, Шварц тощо.

Як відомо, мінімальні поверхні – це поверхні, які мають найменшу площу поверхні. Г. Монж з'ясував, що умова мінімальності площі веде до умови  $H = 0$  (де  $H$  – це середня кривина поверхні), тому ці поверхні стали називати «мінімальними» [1]. В свою чергу середня кривина обчислюється за наступною формулою:

$$H = \frac{1}{2} \cdot \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}, \quad (1)$$

де  $E, F, G$  – коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні, а  $L, M, N$  – коефіцієнти другої квадратичної форми поверхні.

Крім того, цікавий клас геометричних елементів представляють уявні геометричні елементи (точки, криві, поверхні), тобто елементи, до рівнянь яких входять функції комплексного змінного або уявна одиниця  $i = \sqrt{-1}$ . Так, уявна просторова точка має координати:

$$M(a_x + i \cdot b_x, a_y + i \cdot b_y, a_z + i \cdot b_z).$$

Рівняння уявної просторової кривої можна записати у вигляді:

$$x = x(u + i \cdot v), \quad y = y(u + i \cdot v), \quad z = z(u + i \cdot v).$$

З уявними елементами можна виконувати ті ж операції, що і з дійсними, але їх не можна зобразити в звичному нам тривимірному просторі. Лише в деяких випадках можливо отримати дійсні проєкції цих уявних фігур.

Г. Монж запропонував формули уявної мінімальної поверхні:

$$\begin{aligned} X &= u + v; \\ Y &= f(u) + g(v); \\ Z &= i \int \sqrt{1 + f'^2(u)} du + i \int \sqrt{1 + g'^2(v)} dv. \end{aligned} \quad (2)$$

Поверхню (2) неможливо зобразити в тривимірному просторі, оскільки її координата  $z$  містить в своєму складі уявну одиницю  $i$ .

Знайдемо середню кривину  $H$  для поверхні (2). Для цього знайдемо коефіцієнти першої та другої квадратичної форм:

$$\begin{aligned} E &= G = 0; \quad F = 1 + f'(u) \cdot g'(v) - \sqrt{1 + f'^2(u)} \sqrt{1 + g'^2(v)}; \\ L &= \frac{i f''(u)}{\sqrt{1 + f'^2(u)}}; \quad M = 0; \quad N = -\frac{i g''(v)}{\sqrt{1 + g'^2(v)}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Підставивши коефіцієнти  $E, F, G, L, M, N$  до рівняння (1), знайдемо  $H = 0$ .

Пропонуємо розглянути поверхню, у якій уявну одиницю  $i$  в своєму складі будуть містити координати  $x$  та  $y$ , тобто задану рівняннями:

$$\begin{aligned}
X &= i \cdot u + i \cdot v; \\
Y &= i \cdot f(u) + i \cdot g(v); \\
Z &= \int \sqrt{1 + f'^2(u)} du + \int \sqrt{1 + g'^2(v)} dv.
\end{aligned} \tag{4}$$

Обчислимо середню кривину для поверхні (4). Коефіцієнти першої та другої квадратичної форм мають вигляд:

$$\begin{aligned}
E = G = 0; \quad F &= -1 - f'(u) \cdot g'(v) + \sqrt{1 + f'^2(u)} \sqrt{1 + g'^2(v)}; \\
L &= \frac{f''(u)}{\sqrt{1 + f'^2(u)}}; \quad M = 0; \quad N = -\frac{g''(v)}{\sqrt{1 + g'^2(v)}}.
\end{aligned}$$

Підставивши до рівняння (1) отримані коефіцієнти, знайдемо середню кривину  $H = 0$ . Це свідчить про те, що рівняння (4) визначають уявну мінімальну поверхню.

Нехай тепер рівняння поверхні задається наступними параметричними рівняннями:

$$\begin{aligned}
X &= i \cdot u - i \cdot v; \\
Y &= i \cdot f(u) - i \cdot g(v); \\
Z &= \int \sqrt{1 + f'^2(u)} du - \int \sqrt{1 + g'^2(v)} dv.
\end{aligned} \tag{5}$$

Обчислимо коефіцієнти першої та другої квадратичної форм поверхні (5):

$$\begin{aligned}
E = G = 0; \quad F &= 1 + f'(u) \cdot g'(v) - \sqrt{1 + f'^2(u)} \sqrt{1 + g'^2(v)}; \\
L &= \frac{f''(u)}{\sqrt{1 + f'^2(u)}}; \quad M = 0; \quad N = \frac{g''(v)}{\sqrt{1 + g'^2(v)}}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Знайдемо значення середньої кривини для поверхні (5), підставивши коефіцієнти (6) до рівняння (1):  $H = 0$ . Це означає, що дана поверхня є мінімальною поверхнею.

Як відомо, при згинанні поверхонь одна на одну коефіцієнти першої квадратичної форми не змінюються. Тому порівнявши коефіцієнти  $E, F, G$  у виразах (3) та (6), можна стверджувати, що поверхня Монжа та поверхня (5) дозволяють згинання одна на одну і є приєднаними мінімальними поверхнями.

### Література

1. Монж Г. Приложение анализа к геометрии. – М.-Л.: ОНТИ, 1936. – 700 с.
2. Бляшке В. Введение в дифференциальную геометрию. – Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 2000 – 232 с.



УДК 517.928.1

## КОРОТКІ ІСТОРИЧНІ ВІДОМОСТІ ПРО ДОСЛІДЖЕННЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІРРЕГУЛЯРНОЮ ОСОБЛИВОЮ ТОЧКОЮ

О. В. Чорненька, І. А. Рудько

У даній статті подано короткий історичний огляд питання про побудову асимптотичного розв'язку сингулярно збуреного диференціального рівняння другого порядку з іррегулярною особливою точкою. Зокрема, розглядається диференціальне рівняння вигляду

$$x^g \varepsilon^h y'' + a(x, \varepsilon) y' + b(x, \varepsilon) y = f(x, \varepsilon), \quad (1)$$

де  $\varepsilon$  - малий дійсний параметр,  $x = \infty$  - іррегулярна особлива точка, числа  $g$  та  $h$  - натуральні числа, до того ж  $g \geq 2$ ,  $h \geq 1$ , функції  $a(x, \varepsilon)$ ,  $b(x, \varepsilon)$  та  $f(x, \varepsilon)$  задаються асимптотичним розвиненням вигляду

$$a(x, \varepsilon) \sim \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{sk} \varepsilon^k x^{-s}, \quad b(x, \varepsilon) \sim \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} b_{sk} \varepsilon^k x^{-s}, \quad f(x, \varepsilon) \sim \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f_{sk} \varepsilon^k x^{-s}. \quad (2)$$

Для прикладу, зазначимо, що саме до рівнянь вигляду (1) зводяться диференціальні рівняння задач про симетричний прогин тонких круглих пластин змінної товщини у випадку відсутності розтягу.[1]

Зрозуміло, що всі дослідження стосовно звичайних диференціальних рівнянь вищих порядків та лінійних систем диференціальних рівнянь першого порядку можна спростувати на рівняння другого порядку. Враховуючи цей факт, наведемо короткий історичний огляд.

Провівши детальний аналіз літературних джерел з даної теми, приходимо до висновку, що розвиток асимптотичних методів в теорії звичайних диференціальних рівнянь, що містять параметр та особливу точку, відбувався в три етапи. До першого віднесемо дослідження рівнянь та систем, що містять малий параметр. Другий етап – побудова розв'язків диференціальних рівнянь з особливими точками. Слід відмітити, що теорія диференціальних рівнянь з особливими точками розвивалась в тісному зв'язку з теорією сингулярно та регулярно збурених диференціальних рівнянь. Третій етап - дослідження рівнянь та систем, що містять і особливу точку, і параметр.

Перш за все пояснимо поняття «асимптотичні методи». Відомо, що велика кількість задач фізики та техніки зводяться до диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Проте, точний розв'язок можна знайти не для всіх таких рівнянь, тому доводиться застосовувати наближені методи інтегрування. Серед таких методів виділяють асимптотичні методи. В їх основі, згідно праці [2], лежить ідея розвинення шуканого розв'язку в формальний степеневий ряд за степенями малого параметра чи незалежної змінної. Такі ряди найчастіше є розбіжними, проте наближений розв'язок, утворений обриванням формального на  $m$ -му доданку, є досить зручним як для практичних розрахунків, так і для теоретичних досліджень. Побудовані в такий спосіб наближені розв'язки мають асимптотичний характер, тобто прямують до відповідного точного розв'язку не з збільшенням  $m$ , а при прямуванні параметра чи незалежної змінної до своїх граничних значень.

Зародження ідеї застосування асимптотичних методів до побудови розв'язків диференціальних рівнянь пов'язують з працями Ліувілля. Зокрема, дослідження збіжності розвинення заданої функції за власними функціями деякої крайової задачі беруть за основу вивчення поведінки самих власних функцій. Тому саме асимптотичні формули для власних функцій є вирішальними у таких дослідженнях. Ліувілл вперше отримав асимптотичні формули для розв'язку рівняння другого порядку вигляду

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (\lambda g(x) - r(x)) y = 0,$$

де  $\lambda$  - великий параметр. Пізніше цю теорію узагальнив і для рівнянь вищих порядків [2]. Ці результати дали поштовх до розвитку та розв'язання задач математичної фізики.

Асимптотичні розвинення розв'язків диференціальних рівнянь, що містять параметр, залежать від кратності коренів деякого алгебраїчного рівняння, яке називають характеристичним. Запис такого характеристичного рівняння нагадує характеристичне рівняння для лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків зі сталими коефіцієнтами. Найпростішим є випадок простих коренів. Активному розвитку теорії асимптотичного інтегрування лінійних систем диференціальних рівнянь сприяли роботи Л. Шлезінгера, Дж. Д. Біркгофа, Я.Д. Тамаркіна, у яких здійснено побудову асимптотики загального розв'язку лінійних сингулярно збурених диференціальних рівнянь та їх систем у випадку простих коренів відповідного характеристичного рівняння. Зокрема, вивчаючи рівняння вигляду

$$\varepsilon^n y^{(n)} + \varepsilon^{n-1} a_1(t, \varepsilon) y^{(n-1)} + \dots + \varepsilon a_{n-1}(t, \varepsilon) y' + a_n(t, \varepsilon) y = 0$$

у випадку, коли всі корені характеристичного рівняння різні на заданому відрізку зміни  $t$ , Дж.Д. Біркгоф вивів асимптотичні формули

$$y_i(t, \varepsilon) = \left[ \sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon^k y_{ik}(t) + O(\varepsilon^m) \right] \exp\left( \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_i(\tau) d\tau \right), \quad i = \overline{1, n}$$

для зображення  $n$  лінійно незалежних розв'язків цього рівняння.

Розробка асимптотичних методів в нелінійній механіці належить М.М.Крилову та М.М.Боголюбову. Подальший розвиток цих методів подано в працях Ю.О. Митропольського.

У 50 – 60 роках ХХ століття вперше глибоко та всесторонньо почали досліджуватись диференціальні рівняння з повільно змінними коефіцієнтами. Саме цьому питанню присвячено роботи С.Ф. Фещенка, М.І. Шкіля, Л.Д. Ніколенко [2]. Зокрема, С.Ф. Фещенко вивчав рівняння вигляду

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \varepsilon \rho(\tau, \varepsilon) \frac{dy}{dt} + q(\tau, \varepsilon) y = \mathcal{E} f(\tau, \varepsilon) e^{i\theta(t, \varepsilon)},$$

де функції  $\rho(\tau, \varepsilon)$ ,  $q(\tau, \varepsilon)$ ,  $f(\tau, \varepsilon)$  - функції, які повільно змінюються  $\tau = \varepsilon t$  і допускають розвинення за степенями малого параметра  $\varepsilon$ . Для розв'язків цих рівнянь було доведено асимптотику за параметром  $\varepsilon$ .

Важливі результати були отримані для систем вигляду

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau, \varepsilon)x, \quad \tau \in [0; L] \quad (3)$$

де  $x$  –  $n$ -вимірний вектор,  $A(\tau, \varepsilon)$  - квадратна матриця  $n$ -го порядку, яка допускає розвинення в ряд за степенями малого параметра  $\varepsilon$

$$A(\tau, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\tau) \varepsilon^k.$$

Для таких систем С.Ф. Фещенко визначив умови, при виконанні яких можна системи (3) розщепити на підсистеми меншої розмірності.[2]

В роботах М.І.Шкіля вперше одержано результати, щодо побудови розв'язків лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь вигляду (3) у випадку кратних коренів характеристичного рівняння. Микола Іванович знайшов умови, за яких асимптотичні розв'язки системи (3) можна побудувати у вигляді, запропонованому Дж.Д. Біркгофом, але розвинення слід вести за дробовими степенями параметра, визначення показників яких залежить від кратності елементарних дільників, що відповідають кратним власним значенням матриці  $A_0(\tau)$ . [3]

Такий же результат незалежно від М.І.Шкіля був отриманий іншими математиками, зокрема М.М. Моїсєєвим та Х.Л. Территінім. Для розв'язання проблеми кратного кореня було запропоновано застосувати зрізаючі перетворення. Це дозволило звести вихідну систему до рівноносильної системи з простим спектром головного оператора. Але метод М.І.Шкіля виявився більш ефективним, оскільки давав не тільки вигляд шуканих розв'язків, а й ефективний метод знаходження коефіцієнтів відповідних розвинень.

Подальшому розвитку теорії асимптотичного інтегрування лінійних сингулярно збурених систем з кратним спектром головного оператора сприяли роботи учнів М.І. Шкіля. Зокре-

ма, І.І. Старун [4] дослідив більш загальний випадок, коли кратному власному значенню головної матриці відповідає кілька елементарних дільників як однакової так і різної кратності, М.А. Сотніченко [5] удосконалив метод визначення коефіцієнтів розвинень, використовуючи узагальнені обернені матриці.

В роботі [6] Г.С.Жукова дослідила сингулярно збурене векторне диференціальне рівняння

$$\varepsilon^h \frac{dx}{dt} = \left( A_0(t) - \sum_{s \geq 1} \varepsilon^s A_s(t) \right) x$$

за допомогою методів теорії розгалуження та обґрунтувала можливість побудови його фундаментальної системи розв'язків у вигляді асимптотичних рядів. Зокрема, розглянуто випадок кратного власного значення граничного оператора  $A_0(t)$  та встановлено ефективність використання методу діаграм Ньютона. У результаті проведених досліджень Г.С. Жуковій вперше вдалося встановити залежність між внутрішніми властивостями системи і показниками степенів малого параметра, за якими будуються відповідні асимптотичні розвинення шуканих розв'язків.

У 80-х роках минулого століття розпочинається активне дослідження систем вигляду

$$\varepsilon^h B(t, \varepsilon) \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon) x, \quad t \in [0; T], \quad (4)$$

де  $h \geq 0$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$ ,  $A(t, \varepsilon)$ ,  $B(t, \varepsilon)$  - квадратні матриці  $n$ -го порядку, які допускають асимптотичні розвинення

$$A(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A_k(t), \quad B(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k B_k(t), \quad \det B_0(t) \equiv 0.$$

Вивчаючи такі системи, І.І.Старун [7] вперше наголосив на можливості використання теорії в'язок матриць.

Для визначення структури та асимптотичного характеру загального розв'язку системи (4) важливими стали результати, отримані В.П. Яковцем [8]. Саме йому належить ідея поділу розв'язків таких систем у випадку регулярності граничної в'язки матриць  $L(\lambda) = A_0 - \lambda B_0$  на дві групи: 1) розв'язки, що відповідають скінченним елементарним дільникам цієї в'язки; 2) розв'язки, що відповідають її нескінченним елементарним дільникам. Це дозволило остаточно вирішити питання побудови загального розв'язку системи (4).

Узагальненням результатів [9] стало дослідження лінійних вироджених систем диференціальних рівнянь з двома малими параметрами. В роботі [10] В.П. Яковець провів аналіз системи диференціальних рівнянь вигляду

$$\varepsilon^{h_1} \mu^{h_2} B(t, \varepsilon, \mu) \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon, \mu) x, \quad (5)$$

де  $x(t, \varepsilon, \mu)$  - шуканий  $n$ -вимірний вектор,  $t \in [0; T]$ ,  $T < \infty$ ;  $\varepsilon$ ,  $\mu$  - малі, дійсні параметри;  $h_1$ ,  $h_2$  - невід'ємні цілі числа такі, що  $h_1 + h_2 \geq 1$ ;  $A(t, \varepsilon, \mu)$ ,  $B(t, \varepsilon, \mu)$  -  $(n \times n)$ -матриці, які на відрізку  $[0; T]$  допускають рівномірні асимптотичні розвинення

$$A(t, \varepsilon, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^k \mu^s A_{ks}(t), \quad B(t, \varepsilon, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^k \mu^s B_{ks}(t).$$

Ним було встановлено, що структура розв'язків систем (5) та методи їх побудови суттєво залежать від поведінки спектра граничної регулярної в'язки матриць  $L(t, \lambda) = A_{00}(t) - \lambda B_{00}(t)$ . Було досліджено як простий, так і кратний спектр в'язки. Зокрема, у випадку кратних скінченних та нескінченних елементарних дільників в'язки  $L(t, \lambda)$  формальні розвинення шуканих розв'язків потрібно шукати за дробовими степенями параметра  $\varepsilon$  та відношення параметрів  $\frac{\mu}{\varepsilon}$ . Для визначення дробових показників було використано просторовий аналог методу діаграм Ньютона.

Ідеї та методи робіт А.М. Самойленка, М.І. Шкіля, В.П. Яковця широко застосовуються до розв'язання різних задач теорії диференціальних рівнянь.

Розвиток теорії диференціальних рівнянь та систем з особливими точками відбувався в тісному зв'язку з теорією диференціальних рівнянь, залежних від параметра.

Вивченню структури розв'язків диференціальних рівнянь з особливою точкою сприяли роботи А. Пуанкаре. Зокрема, була запропонована ідея дослідження поведінки розв'язків рівняння першого рангу з раціональними коефіцієнтами

$$P_0(z)w^{(n)} + P_1(z)w^{(n-1)} + \dots + P_n(z)w = 0$$

в околі особливої точки за допомогою перетворення Лапласа. Ці результати стали основою для формування теорії асимптотичного інтегрування диференціальних рівнянь в околі особливої точки.

У роботі [11] М.П. Єругіним проведено аналіз лінійної системи двох диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dY}{dx} = Y \sum_{p=s}^{\infty} T_p x^p, \quad s > 1,$$

з іррегулярною особливою точкою  $x = 0$ , де  $Y$  - інтегральна матриця,  $T_p$  - сталі матриці, а заданий ряд збігається в околі  $x = 0$ .

У роботі [12] В.В. Хорошилов побудував фундаментальну матрицю розв'язків для системи  $n$  рівнянь

$$\frac{dY}{dt} = YP = Y \left( P_0 + \frac{P_1}{t} + \frac{P_2}{t^2} + \dots \right), \quad (6)$$

де  $P_i$  - сталі матриці, за умови, що власні значення матриці  $P_0$  мають різні дійсні частини. Крім того, ним детально досліджено системи двох рівнянь вигляду (6) [12], у трьох випадках: 1) коли матриця  $P_0$  має діагональну форму  $[a_1, a_2]$  і елементи  $a_i$ ,  $i = 1, 2$ , задовольняють умову:

$\text{Re}(a_1) \neq \text{Re}(a_2)$ , 2) коли  $\text{Re}(a_1) = \text{Re}(a_2)$  і 3) коли матриця  $P_0$  зводиться до вигляду  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ .

Отримані результати застосовано до дослідження лінійних рівнянь другого порядку.

Дослідження К.Я. Латишевої [13] присвячені вивченню рівнянь  $n$ -го порядку з поліноміальними коефіцієнтами

$$P_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + P_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + P_n(x) = 0$$

в околі іррегулярної особливої точки додатного рангу. Було встановлено, що фундаментальна система формальних розв'язків у випадку кратних коренів характеристичного рівняння має вигляд піднормальних та логарифмічних рядів.

Подальшому розвитку асимптотичних методів для диференціальних рівнянь та систем з особливими точками сприяли дослідження Д.П.Костомарова, М.І. Терещенка, праці Е.А. Коддінгтона та Н. Левінсона [14], В. Вазова [15].

Методи А.М. Самойленка, М.І. Шкіля та В.П. Яковця, розроблені для систем вигляду (5), сприяли більш глибокому вивченню питання про побудову асимптотики розв'язків лінійної системи диференціальних рівнянь з іррегулярною особливою точкою вигляду

$$x^{-h} B(x) \frac{dy(x)}{dx} = A(x)y(x) + f(x) \exp(\epsilon x^{h+1}), \quad A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{-k} A_k, \quad B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{-k} B_k.$$

У роботі [16] вперше було встановлено структуру загального асимптотичного розв'язку системи такого вигляду у випадку кратного спектра регулярної граничної в'язки матриць за умови неповного ( $\det B(x) \neq 0$ ) та повного ( $\det B(x) \equiv 0$ ) виродження матриці  $B(x)$ . Для розв'язків першої та другої груп було виведено рівняння розгалуження та застосовано метод діаграм Ньютона, що дозволило розробити алгоритм побудови формальних розв'язків однорідної системи, охопивши всі можливі випадки, пов'язані зі структурою збурювальних матриць. Ці дослідження узагальнили попередні результати, що стосуються вивчення лінійних систем з іррегулярною особливою точкою.

Теорія диференціальних рівнянь, що містять як малий параметр, так й іррегулярну особливу точку розвивалась значно повільніше.

Вперше системи лінійних диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами у випадку іррегулярної особливої точки вивчалися М.А. Сотніченком та С.Ф. Фещенком [17]. Їм вдалося розв'язати задачу про асимптотичне розщеплення таких систем на підсистеми меншої розмірності. Ці результати не дозволяли побудувати розв'язки досліджуваних систем, але стимулювали проведення подальших досліджень сингулярно збурених систем лінійних диференціальних рівнянь з іррегулярною особливою точкою.

Зокрема, в роботі [18] досліджено питання побудову асимптотики загального розв'язку системи

$$\varepsilon^h \frac{dz}{dx} = x^g A(x, \varepsilon)z + f(x, \varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \frac{\nu x^{g+1}}{g+1}\right)$$

у випадку простого спектра граничної матриці. Було встановлено, що розв'язки відповідної однорідної системи можна побудувати у вигляді, знайденому Біркгофом, але відповідні розвинення необхідно вести у вигляді подвійних рядів за цілими степенями незалежної змінної та параметра. Для неоднорідної системи окремо розглядаються випадки “резонансу” та “нерезонансу”.

У роботі [19] вивчається питання побудови розв'язків лінійної системи вигляду

$$\varepsilon z^{r+1} \frac{dx}{dz} = A(z, \varepsilon)x - f(z, \varepsilon),$$

де  $x(z, \varepsilon)$  - шуканий  $\nu$ -вимірний вектор,  $r$  - натуральне число,  $(\nu \times \nu)$ -матриця  $A(z, \varepsilon)$  та вектор  $f(z, \varepsilon)$  в комплексній області  $|z| < \rho$ ,  $|\varepsilon| < \rho$  ( $\rho > 0$ ) задаються у вигляді подвійного розвинення за степенями  $z$  та  $\varepsilon$ . Припускається, що матриця  $A(0,0)$  не вироджена. Розв'язки запропоновано шукати у вигляді ряду  $x(z, \varepsilon) = \sum_{k,n=0}^{\infty} x_{kn} z^k \varepsilon^n$ , для визначення коефіцієнтів якого

виведено рекурентні формули, досліджено асимптотичний характер побудованих розв'язків. Отримані результати проілюстровано на прикладі лінійного диференціального рівняння

$$z^{r+1} \varepsilon x' = ax - f(z), \quad a \neq 0.$$

У [20] розглядається нелінійна система вигляду

$$\varepsilon^\sigma x^{r+1} \frac{dy}{dx} = f(x, \varepsilon, y), \quad f(0,0,0) = 0,$$

за умови, що якобіан  $\frac{df(0,0,0)}{dy} \neq 0$ . Проведено побудову розв'язків таких систем, вивчено їх асимптотичний характер.

В роботах [21, 22] вивчається лінійна неоднорідна система диференціальних рівнянь першого порядку вигляду

$$\varepsilon^h \frac{dz(x, \varepsilon)}{dx} = x^g A(x, \varepsilon)z(x, \varepsilon) + f(x, \varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \frac{\theta x^{g+1}}{g+1}\right) \quad (7)$$

де  $\varepsilon$  - малий комплексний параметр,  $x$  - незалежна комплексна змінна,  $z(x, \varepsilon)$  - шукана вектор-функція,  $h \geq 0$ ,  $g \geq 0$ ,  $A(x, \varepsilon)$  -  $(n \times n)$ -матриця,  $f(x, \varepsilon)$  -  $n$ -вимірний вектор, які зображуються у вигляді подвійних розвинень за недодатними степенями незалежної змінної  $x$  та невід'ємними степенями малого параметра  $\varepsilon$ ,  $\theta$  - комплексне число. Для побудови асимптотичних розв'язків досліджуваної системи застосовано методи [10]. Вивчено випадки, коли характеристичне рівняння має кратний корінь, якому відповідає один чи кілька елементарних дільників. Зокрема, встановлено, що при наявності кратних коренів у відповідного характеристичного рівняння лінійно незалежні формальні розв'язки лінійної однорідної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з іррегулярною особливою точкою можна побудувати у ви-

гляді подвійних розвинень за дробовими степенями параметра та відношення незалежної змінної й параметра.

На сучасному етапі розвитку науки асимптотичні методи, розроблені в працях [9], [10], широко застосовуються до різних задач в теорії диференціальних рівнянь.

Результати, отримані для систем диференціальних рівнянь з особливими точками та параметром дали поштовх до проведення досліджень із застосуванням подвійних рядів [23]. Саме такий підхід може бути використаний до дослідження рівнянь вигляду (1) та розв'язання фізичних задач, що зводяться до цих рівнянь.

### Література

1. Коваленко А. Д. Круглые пластины переменной толщины / Анатолий Дмитриевич Коваленко. – М. : Государственное издательство физико-математической литературы. – 1959. – 296 с.
2. Фещенко С. Ф. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений / С. Ф. Фещенко, Н. И. Шкіль, Л. Д. Николенко. – К. : «Наукова думка». – 1966. – 250 с.
3. Шкіль М. І. Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях: [навч. посіб. для ун-тів та пед.ін-тів] / Микола Іванович Шкіль. – К. : Вища школа, 1971. – 226 с.
4. Старун И. И. Об асимптотическом поведении решений систем линейных дифференциальных уравнений : автореф. дис. на соиск. науч. ст. канд. физ.-мат. наук : 01.01.02 “Дифференциальные уравнения” / И. И. Старун. – К., 1969. – 16 с.
5. Сотниченко Н. А. Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений / Сотниченко Н. А., Фещенко С. Ф. – К., 1980. – 48 с. (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 80.3).
6. Жукова Г. С. Методы возмущений в задаче асимптотического интегрирования сингулярно возмущенных линейных систем / Жукова Г. С. – К., 1983. – 40 с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 80.38).
7. Старун И. И. Построение асимптотических решений сингулярно возмущенных линейных систем / И. И. Старун // Дифференциальные уравнения. – 1985. – Т. 21, № 10. – С. 1822–1823.
8. Яковец В. П. Асимптотика решений линейной сингулярно возмущенной системы с вырождением / В. П. Яковец // Укр.мат.журн. – 1990. – Т. 42, № 11. – С. 1559–1566.
9. Самойленко А. М. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями / А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець. – К. : Вища школа, 2000. – 294 с.
10. Яковец В. П. Методы возмущений в задаче асимптотического интегрирования вырождающихся сингулярно возмущенных линейных систем с двумя малыми параметрами / В. П. Яковец. – К., 1992. – 52 с. – (Препр./ АН УССР. Ин-т. Математики; 92.34).
11. Еругин Н. П. Показательная подстановка иррегулярной системы линейных дифференциальных уравнений / Н. П. Еругин // Доклады Академии Наук СССР. – 1937. – Т. XVII, № 5. – С. 235–236.
12. Хорошилов В. В. О решениях систем линейных дифференциальных уравнений с иррегулярно-особой точкой / В. В. Хорошилов // Докл. АН УССР. – 1950. – Т. 72, № 2. – С. 241–242.
13. Латышева К. Я. Нормально-регулярные решения и их приложения / К. Я. Латышева, Н. И. Терещенко, Г. С. Орел; под ред. Ю. А. Митропольского. – К. : Вища школа, 1974. – 135 с.
14. Коддингтон Э. А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон. – М. : Изд-во иностранной литературы, 1958. – 474 с.
15. Вазов В. Асимптотические разложения решений дифференциальных уравнений / Вольфганг Вазов ; [пер. с англ. В. Ф. Бутузова, А. Б. Васильевой и М. В. Федорюка / под ред. Васильевой А. Б.]. – М. : Мир, 1968. – 464 с.
16. Шепель О.А. Асимптотичне інтегрування вироджених лінійних систем диференціальних рівнянь з іррегулярною особливою точкою / Олександр Анатолійович Шепель. – Ніжин. – 2009. – 111с.

17. Сотниченко Н. А. Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений / Сотниченко Н. А., Фещенко С. Ф. – К., 1980. – 48 с. (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 80.3).
18. Сотниченко Н. А. Линейные дифференциальные уравнения с иррегулярной особой точкой в банаховом пространстве / Н. А. Сотниченко, Г. П. Давидюк // Докл. АН УССР. Сер. А “Физ.-мат. и техн. науки”. – 1983. – № 5 – С. 18–21.
19. Balser W. Multisummability of formal solutions of singular perturbation problems / W. Balser, J. Mozo-Fernandez // J. Differential Equations – 2002. – № 183. – P. 526–545.
20. Canalis-Durand M. Monomial summability and doubly singular differential equations / M. Canalis-Durand, J. Mozo-Fernandez, R. Schafke // J. Differential Equations – 2007. – № 233. – P. 485–511.
21. Яковець В. П. Асимптотичні розв’язки сингулярно збуреної лінійної системи диференціальних рівнянь з іррегулярною особливою точкою / В. П. Яковець, О. В. Головченко // Нелінійні коливання. – 2009. – Т. 12, № 3. – С. 417–432.
22. Головченко О. В. Побудова розв’язків лінійних систем з особливою точкою та параметром / О. В. Головченко, В. П. Яковець // Труды ИПММ НАН Украины. – 2007. – № 15. – С. 40–49.
23. Chornenka O. Systems of linear homogeneous differential equations with parameter and irregular singular point // The International Academic Congress “European Research Area: Status, Problems and Prospects” 01 - 02 September 2016 – Riga, LSA, 2016. – p. 30-33.

УДК 517.928.1

## СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРОМ ТА ОСОБЛИВОЮ ТОЧКОЮ У ЧАСТИННОМУ ВИПАДКУ

О.В. Чоренька

В даній статті досліджено питання про побудову загального розв’язку системи лінійних диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dy}{dx} = xA(x, \varepsilon)y, \quad (1)$$

з іррегулярною особливою точкою  $x = \infty$ , ранг якої дорівнює 2;  $\varepsilon$  - малий дійсний параметр,  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ ;  $x$  - незалежна дійсна змінна,  $x > x_0 > 0$ ;  $y(x, \varepsilon)$  - шукана вектор-функція;  $A(x, \varepsilon)$  - квадратна матриця  $n$ -го порядку.

Системи лінійних диференціальних рівнянь вигляду

$$\varepsilon^h \frac{dy}{dx} = x^g A(x, \varepsilon)y, \quad (2)$$

де

$$A(x, \varepsilon) \sim \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x^{-s} A_{sk}, \quad (3)$$

вперше вивчались М.А. Сотніченком та С.Ф. Фещенком [1]. Саме цим вченим вдалося розв’язати задачу про асимптотичне розщеплення систем (2), (3) на підсистеми меншої розмірності.

Дослідження асимптотики загального розв’язку (1), (2) у випадку простого спектра граничної матриці  $A_{00}$  висвітлено в роботі [2]. А саме, показано, що розв’язки однорідної системи (2) можна побудувати у вигляді подвійних рядів за цілими степенями змінної та параметра.

Задача побудови асимптотичного розв’язку системи (2) у випадку кратного спектра головного оператора є набагато складнішою. Проте у роботі [3] обґрунтовано, що загальний розв’язок системи (2) можна побудувати у вигляді подвійних розвинень за дробовими степенями параметра та відношення незалежної змінної та параметра.

У даній роботі вивчаються системи вигляду (1), у випадку, коли  $A(x, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r x^{-r} A_{rr}$ , а гранична матриця  $A_{00}$  є діагональною, тобто  $A_{00} = \text{diag}\{\underbrace{\lambda, \lambda, \dots, \lambda}_n\}$ . Тоді  $n$ -кратному власному значенню  $\lambda \neq 0$  відповідає  $n$  лінійно незалежних власних векторів

$$\varphi_1 = \text{colon}\{1, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1}\}, \varphi_2 = \text{colon}\{0, 1, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-2}\}, \dots, \varphi_n = \text{colon}\{0, 0, \dots, \underbrace{0, 1}_{n-1}\}. \quad (4)$$

Вектори  $\psi_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , елементи нуль-простору для матриці  $(A_{00} - \lambda E)^*$ , для даної задачі є рівними  $\psi_i = \varphi_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , тобто

$$(\varphi_i \cdot \psi_i) = 1, \quad i = \overline{1, n}.$$

Обґрунтуємо можливість побудови розв'язків системи (3) у вигляді подвійних степеневих рядів.

Має місце наступна теорема.

**Теорема.** Якщо матриця  $A_{00}$  є діагональною, тобто  $A_{00} = \text{diag}\{\underbrace{\lambda, \lambda, \dots, \lambda}_n\}$ , де  $\lambda \neq 0$ , а

матриця  $A_{11}$  має простий спектр, то система рівнянь (1) має  $n$  частинних формальних розв'язків вигляду

$$y_i(x, \varepsilon) = u_i(x, \varepsilon) \cdot \exp\left(\int_{x_0}^x t \lambda_i(t, \varepsilon) dt\right), \quad i = \overline{1, n}, \quad (5)$$

де  $u_i(x, \varepsilon)$  –  $n$ -вимірні вектори,  $i = \overline{1, n}$ ,  $\lambda_i(x, \varepsilon)$  – скалярні функції,  $i = \overline{1, n}$ , що зображаються формальними розвиненнями

$$u_i(x, \varepsilon) = \varphi_i + \sum_{r+s=1}^{\infty} x^{-s} \varepsilon^k u_{sk}^{(i)}, \quad \lambda_i(x, \varepsilon) = \lambda + \sum_{r+s=1}^{\infty} x^{-s} \varepsilon^k \lambda_{sk}^{(i)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (6)$$

де число  $\lambda$  та вектори  $\varphi_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , є відповідно власним значенням та власними векторами матриці  $A_{00}$ .

Доведення. Для доведення даної теореми достатньо визначити коефіцієнти розвинень (6). Для цього знайдемо похідну вектор-функцій (5)

$$\frac{dy_i(x, \varepsilon)}{dx} = \frac{du_i(x, \varepsilon)}{dx} \cdot \exp\left(\int_{x_0}^x t \lambda_i(t, \varepsilon) dt\right) + u_i(x, \varepsilon) \cdot x \lambda_i(x, \varepsilon) \cdot \exp\left(\int_{x_0}^x t \lambda_i(t, \varepsilon) dt\right), \quad i = \overline{1, n},$$

та підставимо вектори (5) у систему (3). Відповідно отримаємо

$$\begin{aligned} x^{-1} \left( \frac{du_i(x, \varepsilon)}{dx} \cdot \exp\left(\int_{x_0}^x t \lambda_i(t, \varepsilon) dt\right) + u_i(x, \varepsilon) \cdot x \lambda_i(x, \varepsilon) \cdot \exp\left(\int_{x_0}^x t \lambda_i(t, \varepsilon) dt\right) \right) = \\ = A(x, \varepsilon) u_i(x, \varepsilon) \cdot \exp\left(\int_{x_0}^x t \lambda_i(t, \varepsilon) dt\right), \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Оскільки  $\exp\left(\int_{x_0}^x t \lambda_i(t, \varepsilon) dt\right) \neq 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ , то системи запишуться наступним чином

$$x^{-1} \frac{du_i(x, \varepsilon)}{dx} + u_i(x, \varepsilon) \cdot \lambda_i(x, \varepsilon) = A(x, \varepsilon) u_i(x, \varepsilon), \quad i = \overline{1, n}. \quad (7)$$

Підставивши розвинення (2), (6) в системи (7) та врахувавши, що

$$\frac{du_i(x, \varepsilon)}{dx} = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-s) \cdot x^{-s-1} \varepsilon^k u_{sk}^{(i)}, \quad i = \overline{1, n},$$



отримаємо рівності

$$x^{-1} \cdot \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-s) \cdot x^{-s-1} \varepsilon^k u_{sk}^{(i)} + \left( \varphi_i + \sum_{r+s=1}^{\infty} x^{-s} \varepsilon^k u_{sk}^{(i)} \right) \cdot \left( \lambda + \sum_{r+s=1}^{\infty} x^{-s} \varepsilon^k \lambda_{sk}^{(i)} \right) = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x^{-k} A_{kk} \cdot \left( \varphi_i + \sum_{r+s=1}^{\infty} x^{-s} \varepsilon^k u_{sk}^{(i)} \right), \quad i = \overline{1, n}. \quad (8)$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях параметра та змінної, відповідно отримаємо системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Зокрема, при  $\left(\frac{1}{x}\right)^0 \varepsilon^0$  рівняння запишуться у вигляді:

$$(A_{00} - \lambda E) \varphi_i = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

тобто коефіцієнти  $\lambda$  та  $\varphi_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , розвинень (6) є відповідно власним числом та власними векторами матриці  $A_{00}$ .

Прирівнюючи коефіцієнти при  $\left(\frac{1}{x}\right)^0 \varepsilon$ , отримаємо наступні алгебраїчні системи рівнянь

$$(A_{00} - \lambda E) u_{01}^{(i)} = \lambda_{01}^{(i)} \varphi_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Враховуючи, що  $A_{00} - \lambda E = O$  - нульова матриця, то  $\lambda_{01}^{(i)} \varphi_i = 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ , звідки  $\lambda_{01}^{(i)} = 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Проте, вектори  $u_{01}^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , на цьому кроці визначити не можна.

Прирівняємо в рівності (8) коефіцієнти при  $\left(\frac{1}{x}\right)^0 \varepsilon^2$ , отримаємо такі алгебраїчні системи рівнянь

$$(A_{00} - \lambda E) u_{02}^{(i)} = \lambda_{02}^{(i)} \varphi_i + \lambda_{01}^{(i)} u_{01}^{(i)}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Знаючи, що  $\lambda_{01}^{(i)} = 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ , отримаємо  $\lambda_{02}^{(i)} \varphi_i = 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Тоді  $\lambda_{02}^{(i)} = 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Прирівнюючи коефіцієнти при  $\left(\frac{1}{x}\right)^0 \varepsilon^k$ ,  $k \geq 3$ , відповідно знайдемо числа  $\lambda_{0k}^{(i)} = 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Шукані вектори  $u_{0k}^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $k \geq 1$ , з отриманих систем визначити не можна.

На наступному кроці прирівняємо коефіцієнти при  $\left(\frac{1}{x}\right)^0 \varepsilon^k$ ,  $k \geq 0$ . Зокрема, якщо  $\left(\frac{1}{x}\right)^0 \varepsilon^0$ , то  $(A_{00} - \lambda E) u_{10}^{(i)} = \lambda_{10}^{(i)} \varphi_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Врахувавши, що  $A_{00} - \lambda E = O$ , будемо мати

$\lambda_{10}^{(i)} \varphi_i = 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ , тоді  $\lambda_{10}^{(i)} = 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Відповідно при  $\left(\frac{1}{x}\right)^0 \varepsilon$  отримаємо систему

$$(A_{00} - \lambda E) u_{11}^{(i)} = \lambda_{11}^{(i)} \varphi_i - A_{11} \varphi_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Оскільки  $A_{00} - \lambda E = O$ , то маємо іншу систему алгебраїчних рівнянь

$$(A_{11} - \lambda_{11}^{(i)} E) \varphi_i = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Ця система буде розв'язною у випадку виконання умов даної теореми: матриця  $A_{11}$  має простий спектр. Тоді числа  $\lambda_{11}^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , будуть власними числами, а вектори  $\varphi_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , - власними векторами матриці  $A_{11}$ . Відповідно елементами нуль-простору спряженої матриці до  $A_{11} - \lambda_{11}^{(i)} E$  будуть вектори  $\psi_i = \varphi_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Прирівнюючи коефіцієнти при  $\left(\frac{1}{x}\right)^0 \varepsilon^2$ , отримаємо систему

$$(A_{00} - \lambda E)u_{12}^{(i)} = \lambda_{12}^{(i)}\varphi_i + \lambda_{11}^{(i)}u_{01}^{(i)} - A_{11}u_{01}^{(i)}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Оскільки  $A_{00} - \lambda E = O$ , то  $\lambda_{12}^{(i)}\varphi_i + \lambda_{11}^{(i)}u_{01}^{(i)} - A_{11}u_{01}^{(i)} = 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ , тоді системи алгебраїчних рівнянь матимуть запис

$$(A_{11} - \lambda_{11}^{(i)}E)u_{01}^{(i)} = \lambda_{12}^{(i)}\varphi_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

З умов розв'язності цих систем будемо мати  $(\lambda_{12}^{(i)}\varphi_i, \psi_i) = 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Звідси  $\lambda_{12}^{(i)} = 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Тому вектори  $u_{01}^{(i)} = 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Узагальнюючи цей результат для  $\left(\frac{1}{x}\right) \varepsilon^k$ , отримуємо систему

$$(A_{00} - \lambda E)u_{1k}^{(i)} = \lambda_{1k}^{(i)}\varphi_i + \sum_{j=2}^{k-1} \lambda_{1j}^{(i)}u_{0k-j}^{(i)} + \lambda_{11}^{(i)}u_{0k-1}^{(i)} - A_{11}u_{0k-1}^{(i)}, \quad i = \overline{1, n},$$

де  $\lambda_{1j}^{(i)} = 0$ ,  $j = \overline{2, k-1}$ ,  $i = \overline{1, n}$ . З цієї системи отримуємо такі векторно-матричні рівняння

$$(A_{11} - \lambda_{11}^{(i)}E)u_{0k-1}^{(i)} = \lambda_{1k}^{(i)}\varphi_i, \quad i = \overline{1, n},$$

з умов розв'язності яких будемо мати  $\lambda_{1k}^{(i)} = 0$ ,  $u_{0k-1}^{(i)} = 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Проводячи ці дослідження далі, отримаємо наступні результати. Зокрема, при  $\left(\frac{1}{x}\right)^s \varepsilon^0$  будемо мати

$$(A_{00} - \lambda E)u_{s0}^{(i)} = \lambda_{s0}^{(i)}\varphi_i + \sum_{j=1}^{s-1} \lambda_{j0}^{(i)}u_{s-j,0}^{(i)} - (s-2)u_{s-2,0}^{(i)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad s \geq 3.$$

Тоді  $\lambda_{s0}^{(i)} = -\sum_{j=1}^{s-1} \lambda_{j0}^{(i)}(u_{s-j,0}^{(i)}, \psi_i) + (s-2)(u_{s-2,0}^{(i)}, \psi_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $s \geq 3$ .

При  $\left(\frac{1}{x}\right)^s \varepsilon^k$  будемо мати

$$(A_{00} - \lambda E)u_{sk}^{(i)} = \lambda_{sk}^{(i)}\varphi_i + \sum_{j=1}^s \lambda_{j0}^{(i)}u_{s-j,k}^{(i)} + \sum_{j=1}^{s-1} \lambda_{jk}^{(i)}u_{s-j,0}^{(i)} + \sum_{j=2}^s \lambda_{j1}^{(i)}u_{s-j,k-1}^{(i)} + \sum_{j=1}^{s-1} \sum_{q=1}^{k-1} \lambda_{jq}^{(i)}u_{s-j,k-q}^{(i)} + \lambda_{11}^{(i)}u_{s-1,k-1}^{(i)} - A_{11}u_{s-1,k-1}^{(i)} - \sum_{j=2}^{s-1} A_{jj}u_{s-j,k-j}^{(i)} - \delta_{sk}A_{sk}\varphi - (s-2)u_{s-2,k}^{(i)}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Враховуючи, що  $A_{00} - \lambda E = O$ , будемо мати такі системи алгебраїчних рівнянь

$$(A_{11} - \lambda_{11}^{(i)}E)u_{s-1,k-1}^{(i)} = \lambda_{sk}^{(i)}\varphi_i + \sum_{j=1}^s \lambda_{j0}^{(i)}u_{s-j,k}^{(i)} + \sum_{j=1}^{s-1} \lambda_{jk}^{(i)}u_{s-j,0}^{(i)} + \sum_{j=2}^s \lambda_{j1}^{(i)}u_{s-j,k-1}^{(i)} + \sum_{j=1}^{s-1} \sum_{q=1}^{k-1} \lambda_{jq}^{(i)}u_{s-j,k-q}^{(i)} - \sum_{j=2}^{s-1} A_{jj}u_{s-j,k-j}^{(i)} - \delta_{sk}A_{sk}\varphi - (s-2)u_{s-2,k}^{(i)}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Звідси

$$u_{s-1,k-1}^{(i)} = H \left( \lambda_{sk}^{(i)}\varphi_i + \sum_{j=1}^s \lambda_{j0}^{(i)}u_{s-j,k}^{(i)} + \sum_{j=1}^{s-1} \lambda_{jk}^{(i)}u_{s-j,0}^{(i)} + \sum_{j=2}^s \lambda_{j1}^{(i)}u_{s-j,k-1}^{(i)} + \sum_{j=1}^{s-1} \sum_{q=1}^{k-1} \lambda_{jq}^{(i)}u_{s-j,k-q}^{(i)} - \sum_{j=2}^{s-1} A_{jj}u_{s-j,k-j}^{(i)} - \delta_{sk}A_{sk}\varphi - (s-2)u_{s-2,k}^{(i)} \right), \quad i = \overline{1, n};$$

$$\lambda_{sk}^{(i)} = - \left( \sum_{j=1}^s \lambda_{j0}^{(i)}u_{s-j,k}^{(i)} + \sum_{j=1}^{s-1} \lambda_{jk}^{(i)}u_{s-j,0}^{(i)} + \sum_{j=2}^s \lambda_{j1}^{(i)}u_{s-j,k-1}^{(i)} + \sum_{j=1}^{s-1} \sum_{q=1}^{k-1} \lambda_{jq}^{(i)}u_{s-j,k-q}^{(i)} - \right.$$

$$- \sum_{j=2}^{s-1} A_{jj} u_{s-j,k-j}^{(i)} - \delta_{sk} A_{sk} \varphi - (s-2) u_{s-2,k}^{(i)} \Big), \psi \Big), i = \overline{1, n}.$$

Символом  $H$  позначено напівобернену матрицю до  $(A_{11} - \lambda_{11}^{(i)} E)$ .

Таким чином, знайдено алгоритм визначення коефіцієнтів розвинень (6).

Теорему доведено.

Застосовуючи методи [4], можна знайти асимптотичні оцінки побудованого розв'язку.

Якщо виконуються умови  $\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$ , то для кожного формального розв'язку (5) системи (1) існує такий точний розв'язок  $\tilde{y}_i(x, \varepsilon)$ , для якого формальний розв'язок (5) є його асимптотичним розвиненням при  $x \rightarrow \infty$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ . При цьому виконуються нерівності

$$\|y_{mp}^{(i)}(x, \varepsilon) - \tilde{y}_i(x, \varepsilon)\| \leq \tilde{n} \cdot \left( \left( \frac{1}{x} \right)^{m+1} + \varepsilon^p \left( \frac{1}{x} \right) \right), i = \overline{1, n},$$

де

$$y_{mp}^{(i)}(x, \varepsilon) = u_{mp}^{(i)}(x, \varepsilon) \cdot \exp \left( \int_{x_0}^x t \lambda_{mp}^{(i)}(t, \varepsilon) dt \right), i = \overline{1, n},$$

а вектори  $u_{mp}^{(i)}(x, \varepsilon)$  та функції  $\lambda_{mp}^{(i)}(x, \varepsilon)$  задаються скінченними сумами

$$u_{mp}^{(i)}(x, \varepsilon) = \varphi_i + \sum_{s=0}^m \sum_{k=1}^p x^{-s} \varepsilon^k u_{sk}^{(i)} + \sum_{s=1}^m x^{-s} u_{s0}^{(i)},$$

$$\lambda_{mp}^{(i)}(x, \varepsilon) = \lambda + \sum_{s=0}^m \sum_{k=1}^p x^{-s} \varepsilon^k \lambda_{sk}^{(i)} + \sum_{s=1}^m x^{-s} \lambda_{s0}^{(i)}, i = \overline{1, n}.$$

### Література

1. Сотниченко Н. А. Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений / Сотниченко Н. А., Фещенко С. Ф. – К., 1980. – 48 с. (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 80.3).
2. Давидюк Г. П. Интегрирование систем дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами и иррегулярной особой точкой / Г. П. Давидюк // Приближ. методы мат. анализа : сб. научных трудов. – К. : КГПИ, 1980. – С. 53–56.
3. Яковець В. П. Побудова асимптотичних розв'язків сингулярно збуреної лінійної системи диференціальних рівнянь з іррегулярною особливою точкою у випадку кратного спектра граничної матриці / В. П. Яковець, О. В. Головченко // Нелінійні коливання. – 2008. – Т. 11, № 1. – С. 128–144.
4. Самойленко А. М. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями / А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець. – К.: Вища школа, 2000. – 294 с.



## Фізика

УДК 535.015

### ОТРИМАННЯ РІЗНИХ ПРОСВІТЛЮЮЧИХ ПОКРИТТІВ ДЛЯ РІЗНИХ ОПТИЧНИХ МАТЕРІАЛІВ НА УСТАНОВЦІ ВУ-1А

Я. М. Гурчина, С.М. Давиденко, Л.М. Кнорозок

Оптичні покриття застосовують для отримання високих коефіцієнтів відбиття від оптичних деталей та збільшення їх пропускання і контрастності, для отримання поляризованого світла тощо. Їх застосовують також для отримання спектрального та енергетичного розділення і додавання оптичних сигналів та їх хроматичної корекції. Використовують також вузькосмугові, широкосмугові і смугові покриття.

Просвітлюючі покриття вже давно вважаються обов'язковими для оптики, що претендує на статус продукції високої якості. Вони являють собою найтонший шар спеціальної оптичної прозорої речовини, яка «вклинюється» між двома оптичними середовищами: повітрям і лінзою. Як наслідок, утворюється друга межа поділу при відображенні світлового потоку: повітря – просвітлюючий шар - лінза. Товщина і властивості шару, як правило, є такими, що світлові промені, відбиті від цих двох меж, компенсують один одного за рахунок інтерференції.

Просвітлюючі покриття наносяться на обидві сторони лінзи, а шарів може бути один, два, три і більше. Багатошаровість покриття дозволяє знизити відбиття світла від лінзи до 0,2% в заданій частині спектру. Для порівняння: у звичайної лінзи, тобто без покриття, величина відбивання світлового потоку досягає 15%.

Сучасна оптика в основному застосовує декілька видів покриттів: просвітлюючі, зміцнювальні, гідрофобні і металізовані. Це основні, найбільш ефективні види, проте є безліч інших.

Оскільки більшість сучасних лінз вкриті просвітлюючим покриттям, це ставить перед виробниками ще одне важливе завдання - захистити лінзи від зайвого забруднення. Справа в тому, що таке покриття особливо швидко забруднюється, а бруд знижує його ефективність. Щоб захистити лінзи від «налипання» частинок пилу і жиру, на них наносять гідрофобне покриття, яке має водо- і брудовідштовхуючу дію, а також антистатичні властивості і знижує ступінь зволоження лінзової поверхні.

Якщо просвітлююче покриття складається з одного шару, зменшення відображення світлового потоку відбувається тільки в якійсь одній частині спектру. Тому для охоплення всього спектру видимого світла на лінзу наносять кілька шарів покриття - для кожної частини діапазону світла.

Деталі з оптичним покриттям різного призначення успішно використовують у приладах для космічних досліджень, квантовій електроніці, оптичному приладобудування, спектроскопії, астрономії, в побутових приладах, науково-дослідному виробництві. Особливо важливо одержання високоякісних покриттів для військової оптики. Провідні оптичні фірми світу витрачають багато часу і грошей на дослідження в цій області і розробку все нових і нових видів покриття, бо вони забезпечують високу якість і надійність оптичних приладів.

Враховуючи широке застосування оптичних покриттів, проведення їх оптичних досліджень, спрямованих на підвищення ефективності та вдосконалення процесів вакуумного напылення, є на сьогодні актуальним [1, 2].

Одержання покриттів здійснювалося на установці вакуумного напылення ВУ-1А методом електронно-променевого випаровування плівкоутворювальної речовини з наступною її конденсацією на підкладку з контролем основних технологічних параметрів у процесі нанесення покриття. При електронно-променевому випаровуванні плівкоутворювальна речовина нагрівається

у вакуумній камері до температури, при якій відбувається її інтенсивне випаровування в умовах високого вакууму. Це відповідає тиску насиченої пари порядку 1 Па. Зазвичай температуру, при якій тиск насиченої пари становить 1.33 Па, називають умовною температурою  $T_p$ . Речовина, що випаровується, осідає на підкладках і створює оптичну плівку.

Заданий вакуум ( $10^{-4} - 10^{-5}$  мм рт. ст.) отримують за допомогою паромасляного дифузійного насоса, устаткованого мастиловідбивачем і азотними пастками [1].

Технологічний процес нанесення покриттів вимагає виконання ряду операцій у заданій послідовності. Поверхня підкладок спочатку чистилась за допомогою ізопропилового спирту або ацетону. Остаточне очищення підкладок проводилось у вакуумній камері тліючим розрядом при тиску в камері від  $10^{-3}$  до  $10^{-4}$  мм рт. ст. протягом 5 – 10 хвилин. Тліючий розряд забезпечує нагрівання і десорбцію домішок, розщеплює органічні молекули з утворенням летких продуктів, поліпшує міцність напилюваних шарів з підкладкою і скорочує час відкачки робочої камери вакуумної установки.

Для створення якісної плівки молекули випаровуваної речовини повинні поширюватися прямолінійно, тобто не зазнавати зіткнень із молекулами залишкових газів у вакуумі й не розсіюватися. Середня довжина вільного пробігу молекул  $L_{cp}$  залежить від концентрації (тиску) залишкових газів і визначається з кінетичної теорії газів. При тиску  $5 \cdot 10^{-5}$  мм рт. ст. вона дорівнює 900 мм  $L_{cp}$  і повинна бути багато більше відстані від випарника до підкладок. У вакуумній камері тиск не повинен перевищувати  $(3 - 5) \cdot 10^{-5}$  мм рт. ст. Але навіть при цьому тиску певна частина молекул випаровуваної речовини розсіюється й осідає на стінках і дні камери. При тривалій роботі на стінках і дні камери накопичується шар плівкоутворювальних речовин, що адсорбує гази з камери та з атмосфери під час відкриття камери, а потім виділяє їх у вакуумі («газує») і збільшує тривалість відкачки до необхідного вакууму. Тому стінки й дно камери необхідно періодично чистити. Хороший результат для спрощення цього процесу дають екрани з нержавіючої сталі; ці екрани встановлюються поблизу дна й стінок вакуумної камери. Їх потрібно періодично очищати травленням в азотній кислоті. Екрани (або стінки, дно камери й внутрішню арматуру робочої камери) можна обгортати тонкою фольгою з алюмінію ( $h = 0,01 - 0,03$  мм) і видаляти її після декількох напилювань. Реальне використання екранів істотно знижує необхідність періодичного чищення камери.

Залишкові гази співударяються з підкладкою під час напилення плівки і залишаються в ній. При тиску  $10^{-5}$  мм рт. ст. частота зіткнень залишкових газів з підкладкою відповідає осадженню плівкоутворювальної речовини зі швидкістю осадження 20 нм/с. Природно, що цей процес збільшує пористість плівки і знижує її механічні характеристики. Так при тиску 0,0075 мм рт. ст. осаджувані плівки настільки пористі, що стираються звичайною ватою.

Для проведення процесу випаровування речовини у вакуумі необхідно мати випарник, що містив би випаровувану речовину і підтримував її при температурі вище  $T_p$ . Для плівкоутворювальних матеріалів ця температура лежить у діапазоні 200 – 2500 °С. Щоб уникнути забруднення осаджуваних плівок речовина випарника повинна мати при робочій температурі незначну пружність пари.

Для зниження світлорозсіювання покриттів необхідно виконати ретельне очищення підкладки, оптимізацію умов утворення покриттів та їхню стабілізацію. Створення й стабілізація необхідного мікроклімату звичайно здійснюється шляхом кондиціонування. Температуру доцільно підтримувати з похибкою до  $\pm 1$  °С, а відносну вологість – до  $\pm 3$  %. Більшість оптичних покриттів, зокрема окислів Ti, Zr, Th, Si та їхніх сумішей, отриманих хімічним методом в оптимальних умовах плівкоутворення, мають коефіцієнт світлорозсіювання порядку тисячних часток відсотка, тобто близький до коефіцієнта розсіювання підкладки. Однак оптимальні умови витримати не завжди вдається, що може призвести до збільшення світлорозсіювання на 1 – 2 порядки.

Випарувані молекули матеріалу потрапляють на підкладку, де з них відбувається утворення острівцевої структури, що зливається в суцільну плівку. Чим вище температура випаровування матеріалу, тим менші розміри острівців. Зокрема, тугоплавкі метали утворюють практично відразу моноплівки, тобто відбувається утворення однорідної моноструктури, що може надалі служити гарним адгезійним шаром.

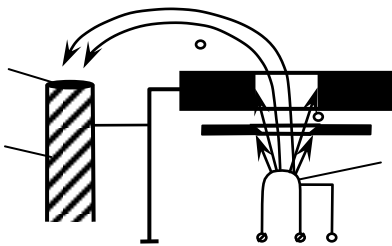
Напилювані шари дуже чутливі до умов формування плівок, оскільки визначальні їхні оптичні параметри – показник заломлення та коефіцієнт поглинання – залежать від структури плівок. Визначальни-

ми чинниками, що мають максимальний вплив на величини  $n$  і  $k$  є:

1. Ступінь розрідження у вакуумній камері.
2. Наявність і склад залишкових газів.
3. Чистота підкладки (дефекти поверхні).
4. Хімічна чистота поверхонь.
5. Наявність поверхневих напружень.
6. Швидкість зміни температури підкладки під час осадження шару.
7. Температура підкладки під час напылення покриття.
8. Швидкість осадження плівкоутворювального матеріалу.

Спектральні залежності коефіцієнтів пропускання, відбиття й поглинання визначаються оптичними параметрами матеріалів та їхньою товщиною.

Для осадження оптичних покриттів використовуються електронні гармати зі згином траєкторії електронного променя (мал. 1) [2, 3].

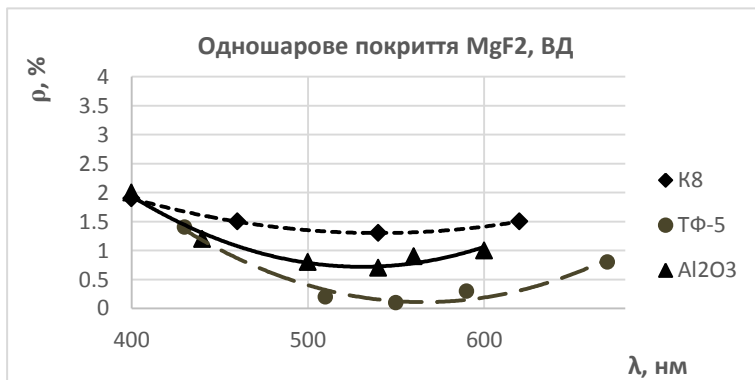


Мал. 1. Схема електронно-променевого випарника:  
 $U$  – випаровувана речовина,  $A$  – анод,  
 $K$  – катод,  $O$  – обмежувача діафрагма,  $E$  – екрануюча діафрагма

На мал. 2. зображені графіки відбивання оптичних матеріалів із скла марок К8, ТФ-5,  $Al_2O_3$ . З них видно, що для одношарового покриття (у нашому випадку  $MgF_2$ )

графік буде розташований нижче, чим більший показник заломлення ( $n$ ) матеріалів, і ефективніше просвітлююче покриття. І це правило впливає з теорії просвітлюючих покриттів. А саме, так як фізична основа процесу просвітлення пов'язана з інтерференцією світла, то світло, відбите на межі повітря – плівка інтерферує зі світлом, відбитим на межі скло – плівка. При умові рівності амплітуд і зсуву коливань по фазі, рівному  $\lambda / 2$ , дві відбиті хвилі можуть повністю компенсувати одна одну. Для виконання цих умов коефіцієнт відбивання від поверхні плівки  $\rho_1 = [(n_2 - n_1)/(n_2 + n_1)]^2$  і коефіцієнт відбивання від поверхні плівка – підкладка  $\rho_2 = [(n_3 - n_2)/(n_3 + n_2)]^2$  повинні бути рівні між собою:  $[(n_2 - n_1)/(n_2 + n_1)]^2 = [(n_3 - n_2)/(n_3 + n_2)]^2$ . Покладаючи  $n_1 = 1$  (повітря), маємо  $n_2 = \sqrt{n_3}$ . Мінімальна товщина плівки  $d$  визначається із умови, що оптична різниця ходу променів в плівці  $\delta = \lambda / 2 = 2dn_2$ , звідси геометрична товщина просвітлюваної плівки

$d = \lambda / (4n_2)$ , а оптична  $n_2d = \lambda / 4$  [3].

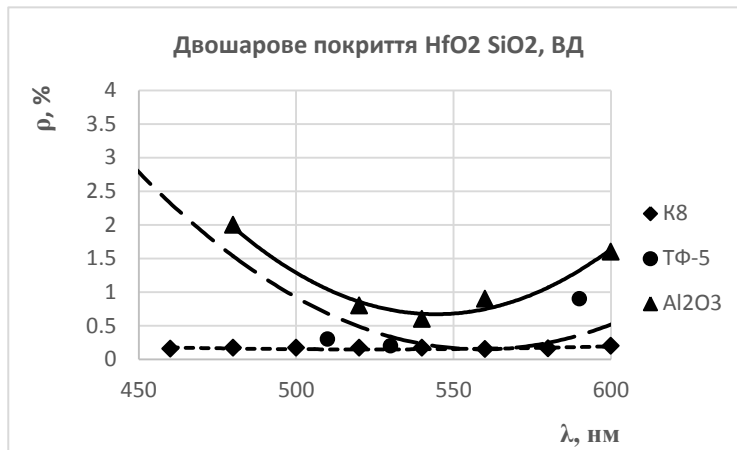


Мал. 2. Відбивання оптичних матеріалів із скла марок К8, ТФ-5,  $Al_2O_3$  для одношарового покриття  $MgF_2$

Одношарове просвітлювальне покриття теоретично дозволяє зменшити до нуля відбивання світла відповідної довжини

хвилі  $\lambda$  від поверхні підкладки. В якості розрахованої для видимої області спектра вибирають довжину хвилі  $\lambda = 540$  нм, розташовану в області максимальної чутливості ока людини – в зеленій частині спектру [4, 5, 6].

Для того, щоб отримати просвітлення в більш широкому діапазоні спектра, застосовують двошарові, тришарові і багатошарові покриття. На мал. 4 зображені графіки відбивання світла у видимому діапазоні із оксидів  $HfO_2$  і  $SiO_2$ . З них видно, що те правило, яке діє для одношарових покриттів не справджується для двошарових. І, як видно з графіків, двошарові просвітлювальні покриття більш хроматичні.



Мал. 3. Відбивання оптичних матеріалів із скла марок K8, ТФ-5, Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> для двошарового покриття HfO<sub>2</sub> SiO<sub>2</sub>

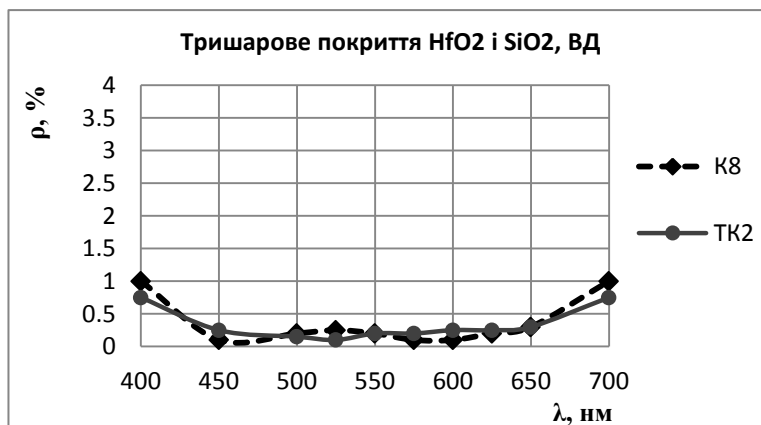
У двошарового просвітлюючого покриття при оптичній товщині шарів  $\lambda / 4$  інтенсивність відбитого світла може дорівнювати нулю при умові  $n_3 / n_2 = \sqrt{n_4}$ , де  $n_2$  і  $n_3$  – показники заломлення відповідно першого і другого шарів покриття, а  $n_4$  – показник заломлення матеріалів підкладок.

Коефіцієнт відбивання для  $\lambda = 540$  нм при двошаровому просвітлюючому покритті, нанесеному на підкладку із скла K8, не перевищує 0,5 % [1, 6].

На мал. 4 зображено два графіка тришарового просвітлюючого покриття.

Для цього використовувались матеріали із суміші оксидів гафнію і кремнію (HfO<sub>2</sub> + SiO<sub>2</sub>) з показником заломлення  $n = (1,65 - 1,84)$ . Потім напилувався чистий оксид гафнію (HfO<sub>2</sub>) з  $n = 1,95$ . Третій шар напилувався із чистого кремнію (SiO<sub>2</sub>) з  $n = 1,44$ .

Матеріали наносились на скло марки K8 ( $n = 1,52$ ) і скло марки ТК2 ( $n = 1,58$ ).



Мал. 4. Відбивання оптичних матеріалів із скла марок K8 і ТК2 для тришарового покриття HfO<sub>2</sub> і SiO<sub>2</sub>.

Як бачимо з графіків, коефіцієнти відбиття (не більше 0,3%) приблизно рівні в межах від 0,45 мкм до 0,65 мкм. Тобто графіки для різних марок скла знаходяться майже на одному рівні і цілком задовольняють розрахункам.

Нанесення покриттів проводилося на вакуумній установці

ВУ-1А. При цьому для більш точного отримання розрахованих коефіцієнтів відбиття в фотометричному каналі для видимої області спектра використовувався фільтр СЗС-22, що не передбачено в самій комплектації установки. Це пояснюється тим, що видимий спектр фільтра СЗС-22 звужений до 0,52 мкм. І жовто-червона область спектра через нього не проходить. А максимум чутливості фотоприймача припадає на зелену область спектра. Тому оператор, який проводить наплення, більш точно зафіксує чвертьхвильовий шар, перекривши напилуючий матеріал заслонкою при дослідженні максимуму (або мінімуму) показника фотометра.

Просвітлення оптичних деталей взагалі стало нагальною потребою сьогодення. І це тому, що технічні напрямки, де воно застосовується, продовжують розвиватися і дуже швидко.

В даній роботі показано, що можна просвітлювати різні оптичні матеріали підкладки покриттям із одних і тих же речовин, що робить їх більш економічним. При цьому отримувати близькі до розрахункових оптичні характеристики.

У результаті проведеної роботи досліджено специфіку одержання вакуумних покриттів, які виготовляють фахівці НВК міста N; з'ясовано переваги установки вакуумної установки для одержання оптичних покриттів; показано, що важливе значення при виготовленні інтерференційних покриттів мають оптичні параметри плівки, з яких вони сконструйовані. Особливе місце серед них займають коефіцієнт поглинання й показник заломлення. Як правило, показник заломлення плівки може відрізнитися від показника заломлення кристала на кілька відсотків.

Одержано якісні різноманітні покриття, які наносяться на оптичні матеріали: просвітлювальні покриття одно-, дво-, тришарові із матеріалів HfO<sub>2</sub>, SiO<sub>2</sub>, Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, MgF<sub>2</sub>.

Запропоновано вдосконалення технологічного процесу вакуумного напилення оптичних покриттів на НВК міста N, зокрема шляхом одержання високого вакууму та зменшення кількості не контрольованих технологічних факторів. Для вирішення вказаних проблем запропоновано використання паромасляного дифузійного насоса, устаткованого мастиловідбивачем і алюмінієвого екрану.

Проведений контроль якості і дослідження оптичних властивостей отриманих покриттів, перевірка оптичних параметрів плівок показала їх відповідність вимогам ОСТ 3.1901-95. Результати науково-дослідної знайшли впровадження на НВК міста N., раціональні пропозиції в даний час проходять апробацію на виробництві.

### Література

1. Фурман Ш. А. Тонкослойные оптические покрытия / Ш.А. Фурман. – Л.: Машиностроение, 1977. – 264 с.
2. Ершов А.В., Машин А.И. Многослойные оптические покрытия. Проектирование, материалы, особенности технологии получения методом электроннолучевого испарения. [Учебно-методич. материал по программе повышения квалификации «Новые материалы электроники и оптоэлектроники для информационно-телекоммуникационных систем»] / А. В. Ершов, А. И. Машин. – Нижний Новгород, 2006. – 99 с.
3. Пат. 22723 Україна, Матеріали для оптичних покриттів / Зінченко В. Ф.; заявник і патентовласник; опубл. 07.04.1998.
4. Зінченко В.Ф. Оптичні та експлуатаційні властивості тонкопліткових систем інтерференційної оптики (огляд) / В.Ф. Зінченко, В.П. Соболь, Г.І. Кочерба, Є.В. Тімухін, Н.П. // Фізика і хімія твердого тіла. – 2007. – Т. 8, № 3 – С. 441 – 450.
5. ОСТ 3.1901-95
6. Зубаков В. Г. Технология оптических деталей: Учебник для студентов оптических специальностей вузов / В. Г. Зубаков, М. Н. Семибратов, С. К. Штандель; Под ред. М. Н. Семибратова. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1985. – 367 с.

УДК 621.315 535.3:539.2

## ОПТИМІЗАЦІЯ КРИТЕРІЇВ ДЛЯ ДИСПЕРСІЙНОГО АНАЛІЗУ СПЕКТРІВ ІЧ-ВІДБИВАННЯ ВІД ПОВЕРХНІ МОНОКРИСТАЛІВ ОКСИДУ ЦИНКУ

Є.Ф. Венгер<sup>1</sup>, І.В. Венгер<sup>1</sup>, Л.Ю. Мельничук<sup>2</sup>, О.В. Мельничук<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Інститут фізики напівпровідників імені В.Є. Лашкарьова НАН України, Київ, Україна, 03028, Київ 28, проспект Науки, 41

<sup>2</sup>Ніжинський державний університет імені Миколи Гоголя, м. Ніжин, Україна, 16600, вул. Графська, 2, E-mail: mov310@mail.ru.

Стрімкий розвиток сучасної акусто-, мікро- та оптоелектронної техніки значною мірою пов'язаний із вивченням оптичних та електрофізичних властивостей напівпровідників. За останні десятиліття в науковій літературі опубліковано велику кількість праць, яка присвячена експериментальному та теоретичному дослідженню різних напівпровідникових матеріалів, що дозволяють отримати відомості про їх властивості [1 – 6]. Так, за допомогою експериментального дослідження та дисперсійного аналізу коефіцієнта зовнішнього відбивання та пропускання в ІЧ-області довжин хвиль уперше визначено величини енергетичних проміжків у забороненій зоні напівпровідників, отримано відомості про фононний та плазмон-фононний спектр кристалів тощо [7]. Особливу увагу дослідників привертають неруйнівні методи, кількість яких безперервно зростає. Це дозволяє удосконалити методику експрес-аналізу властивостей широкоживаних у приладобудуванні напівпровідників (SiC, CdS, ZnO та ін.) та проводити дослідження властивостей нових напівпровідникових сполук (зокрема, MgZnO, ZnMgO) [8]. Крім того, не всі параметри напівпровідників можуть бути безпосередньо виміряні простими і доступними



методами. Дослідження більшості з них вимагає не лише сучасного обладнання для експериментальних досліджень, але й використання складної математичної обробки. Завдяки цьому методам експериментального дослідження та математичного моделювання властивостей напівпровідникових матеріалів в останні роки приділяється все більше уваги [9, 10].

Метою даної роботи є удосконалення методики проведення дисперсійного аналізу спектрів зовнішнього ІЧ-відбивання при дослідженні оптичних та електрофізичних властивостей полярних оптично-анізотропних сильно легованих напівпровідників.

Як відомо, типовими представниками одновісних оптично-анізотропних кристалів є  $\text{BeO}$ ,  $\text{CdS}$ ,  $\text{ZnO}$  та ін. [11]. Кожен із вказаних кристалів характеризується фононною анізотропією, а для легованих монокристалів  $\text{CdS}$  і  $\text{ZnO}$  характерна анізотропія і плазмової підсистеми [12 – 15]. Особливої уваги заслуговують монокристали оксиду цинку ( $\text{ZnO}$ ), які належать до напівпровідникових з'єднань  $A^{II}B^{VI}$  і мають гексагональну структуру вюрциту з просторовою групою  $C_{6v}^4$ .  $\text{ZnO}$  є одновісним кристалом із шириною забороненої зони  $E_{cv} \leq 3,43$  eV та  $n$ -типом провідності з чотирма атомами в елементарній комірниці [16]. Фононний спектр складається з дев'яти оптичних і трьох акустичних гілок. Крім того, для  $\text{ZnO}$  має місце чотири типи фононів: 1) активні в КР і ІЧ-спектрах коливань типу  $A_1$ , поляризовані вздовж вісі  $z$ , співпадаючих з віссю кристала; 2) активні в обох спектрах коливань типу  $E_1$ , які поляризовані в площині  $xу$ ; 3) дві  $E_2$  гілки фононів, що активні в КР; 4) два неактивних коливання типу  $B_1$ . Згідно монографії [12] монокристали оксиду цинку характеризуються частково йонним типом зв'язку, тому фононні гілки, що відповідають активним в ІЧ-спектрі коливанням, розщеплюються на дві, одна з яких відноситься до поздовжнього (LO), а друга – до поперечного (TO) оптичного коливання. У роботах [12, 16] показано, що для оксиду цинку крім далекодіючих електростатичних сил, відповідальних за LO-TO розщеплення, необхідно враховувати анізотропію близькодійючих міжатомних сил. Саме остання зумовлює залежність частот поперечної і поздовжньої оптичних гілок від орієнтації площини поляризації фонуна відносно оптичної вісі кристала [17].

У даній роботі використано монокристали  $\text{ZnO}$ , вирощені методом гідротермального синтезу [12, 16]. Зразки  $\text{ZnO}$  являють собою прямокутні паралелепіпеди  $10 \times 8 \times 8$  мм<sup>3</sup> з гранями, дві з яких перпендикулярні оптичній вісі  $C$  [12].

Експериментальні дослідження спектрів зовнішнього відбивання в області «залишкових променів» оксиду цинку проведено за допомогою інфрачервоного спектрофотометра SPECORD-M80. Більш детальна інформація проведення експерименту описана в монографії [12]. У даній роботі зупинимось на методичному аспекті проведення експерименту. По-перше, у блок пам'яті машини спектрофотометра SPECORD-M80 записують коефіцієнт відбивання  $I_0(\nu)$  від дзеркала (напилений шар алюмінію на скло) і зразка  $I(\nu)$ . Потрібно наголосити, що прилад SPECORD-M80 дає можливість проводити вимірювання кожної точки протягом 60 с і записувати в блок пам'яті середні експериментальні значення  $RE(\nu)$  на даній частоті  $\nu_i$ , і саму частоту, на якій проводились вимірювання. По-друге, величина кроку сканування за частотою може автоматично змінюватись в залежності від важливості для експериментатора досліджуваної ділянки спектра.

Значення чисел у масивах, що відповідають одній частоті  $\nu_i$ , діляться  $RE(\nu_i) = I(\nu_i)/I_0(\nu_i)$  та записуються у блок пам'яті машини спектрофотометра, а за необхідності виводяться на екран монітора та друкарський пристрій.

Для отримання масиву розрахункових значень коефіцієнта відбивання  $RT(\nu_i)$  на ЕОМ проводився розрахунок спектрів зовнішнього відбивання за формулами, що враховують адитивний внесок у коефіцієнти відбивання об'ємних фононів і плазмонів за орієнтацій  $E \perp C$  і  $E \parallel C$  (знаки  $\perp$  і  $\parallel$  під час запису частково опущено) [12, 18]:

$$R(\nu) = \frac{\sqrt{K_0} - \sqrt{2(\sqrt{K_0} + \varepsilon_1)} + 1}{\sqrt{K_0} + \sqrt{2(\sqrt{K_0} + \varepsilon_1)} + 1}, \quad (1)$$

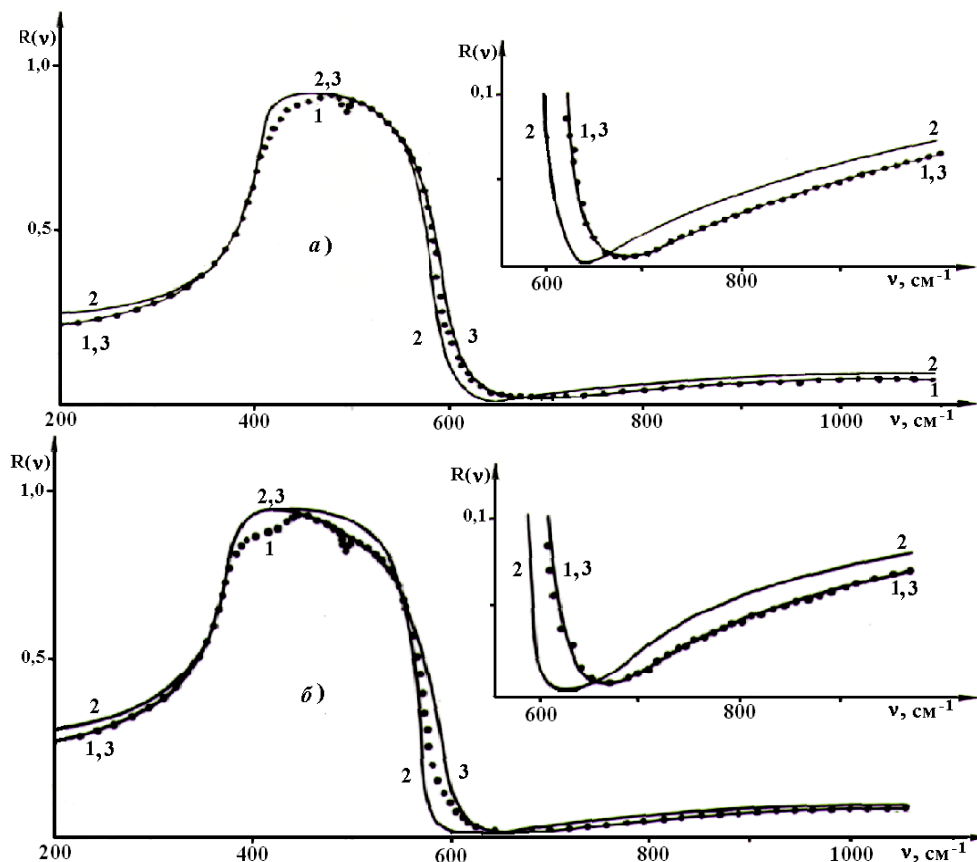
де

$$\varepsilon_1 = \frac{A + B(1 - y_1)}{(1 - y_1)^2 + Dy_1} - \frac{A}{D_p + x_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{B\sqrt{1 - y_1}}{(1 - y_1)^2 + Dy_1} - \frac{A}{D_p + x_1} \sqrt{\frac{D_p}{x_1}},$$

$$K_0 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2, \quad A = \varepsilon_{0\perp, \parallel} - \varepsilon_{\infty\perp, \parallel}, \quad y_1 = (\gamma_{\perp, \parallel})^2, \quad D = (\gamma_f / \gamma_{\perp, \parallel})^2, \quad x_1 = (v / \nu_{p\perp, \parallel})^2,$$

де  $\nu$  – частота ІЧ-випромінювання (в  $\text{см}^{-1}$ );  $\nu_{p\perp, \parallel}$  – частота плазмових коливань (в  $\text{см}^{-1}$ ) при  $E \perp C$  і  $E \parallel C$ ;  $\gamma_f$  та  $\gamma_{p\perp, \parallel}$  – коефіцієнти затухання фононів та плазмонів;  $\varepsilon_{\infty\perp, \parallel}$  і  $\varepsilon_{0\perp, \parallel}$  – високочастотна та статична діелектрична проникність перпендикулярно і паралельно осі  $C$ ;  $\nu_{T\perp, \parallel}$  та  $\nu_{L\perp, \parallel}$  – частоти поперечних та поздовжніх оптичних коливань при  $E \perp C$  і  $E \parallel C$ .

На мал. 1 представлено експериментальні спектри зовнішнього ІЧ-відбивання (точки) монокристалів ZnO, отриманих у роботі [12]. Спектри зареєстровані за орієнтацій  $E \perp C$  (точки 1, мал. 1, а) і  $E \parallel C$  (точки 1, мал. 1, б) в діапазоні від 200 до 1200  $\text{см}^{-1}$  за допомогою спектрофотометра SPECORD-M80. Як видно з даного рисунка, область «залишкових променів» ZnO розміщена в діапазоні 380 – 570  $\text{см}^{-1}$  при  $E \perp C$  і 412 – 590  $\text{см}^{-1}$  при  $E \parallel C$ . В області частоти активного оптичного фонуна  $\nu_t$  є ділянка з високим коефіцієнтом відбивання, що зумовлено дипольними коливаннями ґратки.



Мал. 1. Спектри ІЧ-відбивання  $R(\nu)$  від поверхні ZnO (зразок ZOI-3). Експеримент (точки – 1):

а)  $E \perp C$ ; б)  $E \parallel C$ . Розрахунок (лінія – 2):  $E \perp C$ :  $\nu_{p\perp} = 240 \text{ см}^{-1}$ ,  $\gamma_{p\perp} = 280 \text{ см}^{-1}$ ,  $\gamma_{f\perp} = 13 \text{ см}^{-1}$ ,  
 $\delta = 3,4 \cdot 10^{-2}$ ;  $E \parallel C$ :  $\nu_{p\parallel} = 250 \text{ см}^{-1}$ ,  $\gamma_{p\parallel} = 260 \text{ см}^{-1}$ ,  $\gamma_{f\parallel} = 13 \text{ см}^{-1}$ ,  $\delta = 3,6 \cdot 10^{-2}$ .

На вставці  $R(\nu)$  збільшено в 2 рази.

На вставці справа представлено спектри  $R(\nu)$  монокристала ZnO, збільшені у 2 рази, за орієнтацій  $E \perp C$  (точки 1, мал. 1, а) і  $E \parallel C$  (точки 1, мал. 1, б) в області «залишкових променів», отримані при дзеркальному скануванні частоти ІЧ-випромінювання при максимальному наборі і усередненні числових значень протягом указаних 60 с.

Розрахункові спектри зовнішнього ІЧ-відбивання при орієнтаціях  $E \perp C$  і  $E \parallel C$  (лінії 2) в діапазоні 200 – 1200  $\text{см}^{-1}$  отримані за допомогою математичної моделі, представлені вище, апробованої на монокристалах 6Н-SiC і більш детально описаної в роботі [6]. Взаємоузгоджені параметри оксиду цинку взяті з роботи [18] і подані в табл. 1.

Таблиця 1

Взаємно узгоджені об'ємні параметри монокристала ZnO ( $T = 293$  К) [12, 18]

ZnO	$\epsilon_0$	$\epsilon_\infty$	$\nu_T, \text{см}^{-1}$	$\nu_L, \text{см}^{-1}$
$E \perp C$	8,10	3,95	412	591
$E \parallel C$	9,00	4,05	380	570

Порівняння спектрів ІЧ-відбивання  $R(\nu)$  від поверхні ZnO (зразок ZO1-3) при  $E \perp C$  і  $E \parallel C$  вказує на особливості анізотропії плазмон-фононної взаємодії, які проявляються на частотах 200 – 380 і 420 – 1200  $\text{см}^{-1}$ . У діапазоні 380 – 420  $\text{см}^{-1}$  форма кривих близька одна до одної. Чітко зареєстровано відмінності спектрів  $R(\nu)$  ZnO в діапазоні 580 – 660  $\text{см}^{-1}$ , що пов'язані з анізотропією коливального спектра кристала, з різними концентраціями електронів у цих зразках та з анізотропією властивостей плазми носіїв зарядів. Анізотропія оптичних властивостей плазмонів проявляється в різних значеннях для  $\nu_p$  і  $\gamma_p$  при  $E \perp C$  і  $E \parallel C$  слабо та сильно легованих зразків.

Визначення оптичних та електрофізичних параметрів напівпровідникових монокристалів за спектрами ІЧ-відбивання є складним математичним завданням. Однак, дисперсійний аналіз експериментальних і розрахункових спектрів ІЧ-відбивання в області «залишкових променів» одновісних кристалів дозволяє визначити концентрацію, рухливість, питому провідність тощо з точністю до похибки експерименту.

У джерелах [7, 17, 19, 20] описано загальну методику оптимізації дисперсійного аналізу розрахункового і експериментального спектрів. При цьому потрібно звернути увагу на те, що у кожному випадку існують свої труднощі. Так, математичне моделювання спектра зовнішнього відбивання в області «залишкових променів» одновісних напівпровідників значно ускладнюється при врахуванні легованості монокристалів.

У роботах [12 – 14, 17, 18] моделювання спектра зовнішнього відбивання здійснювалось при використанні максимальної області спектра, в якій проводився експеримент. Зокрема, для монокристалів ZnO при орієнтаціях  $E \perp C$  і  $E \parallel C$  у базу даних вводились усі експериментальні дані з діапазону 200 – 1200  $\text{см}^{-1}$  [12, 18]. Розрахунок спектра виконувався при використанні діелектричної проникності з адитивним вкладом фононної і плазмової підсистем. Задача максимально-го наближення експериментальних і розрахункових спектрів ІЧ-відбивання легованого оксиду цинку зводилась до використання взаємно узгоджених об'ємних параметрів монокристала ZnO [12, 18], наведених у табл. 1 та варіювання трьох параметрів, а саме коефіцієнта затухання поперечного оптичного фонуна  $\gamma_f$ , коефіцієнта затухання  $\gamma_p$  і частоти плазмонних коливань  $\nu_p$ , які в подальшому використовуються для розрахунку оптичних та електрофізичних властивостей монокристала оксиду цинку.

Достовірність оцінки величини параметра контролюється додатковим аналізом середньо-квадратичного відхилення  $\delta$  значень експериментального коефіцієнта відбивання від розрахункового за формулою:

$$\delta = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sqrt{(RE(\nu_i) - RT(\nu_i))^2}, \quad (2)$$

де  $RE(\nu_i)$ ,  $RT(\nu_i)$  – значення відповідно експериментального і теоретичного коефіцієнтів відбивання в  $i$ -й точці.

Функція  $\delta$  в формулі (2) характеризує точність підгонки розрахунку до експерименту. Мінімізація  $\delta$  відбувається шляхом зміни параметрів  $\gamma_f$ ,  $\nu_p$ ,  $\gamma_p$  у декілька етапів. На перших етапах по чергову зміна кожного параметра підгонки складає 0,1 від заданих величин. Після цього здійснюється підгонка з кроком, у десять разів меншим, і процес мінімізації повторюється до тих пір, поки ні один із параметрів не приводив до зменшення  $\delta$  або значення  $\delta$  стало меншим за задану точність. По завершенні підгонки здійснюється запис шуканих величин у блок пам'яті, на екран монітора та друкарський пристрій за необхідності виводяться графіки у вигляді, представленому на мал. 1. Отримані для зразка ZO1-3 значення  $\gamma_f$ ,  $\nu_p$ ,  $\gamma_p$  подано у табл. 2 під номером 1 при орієнтаціях  $E \perp C$  і  $E \parallel C$ .

Таблиця 2

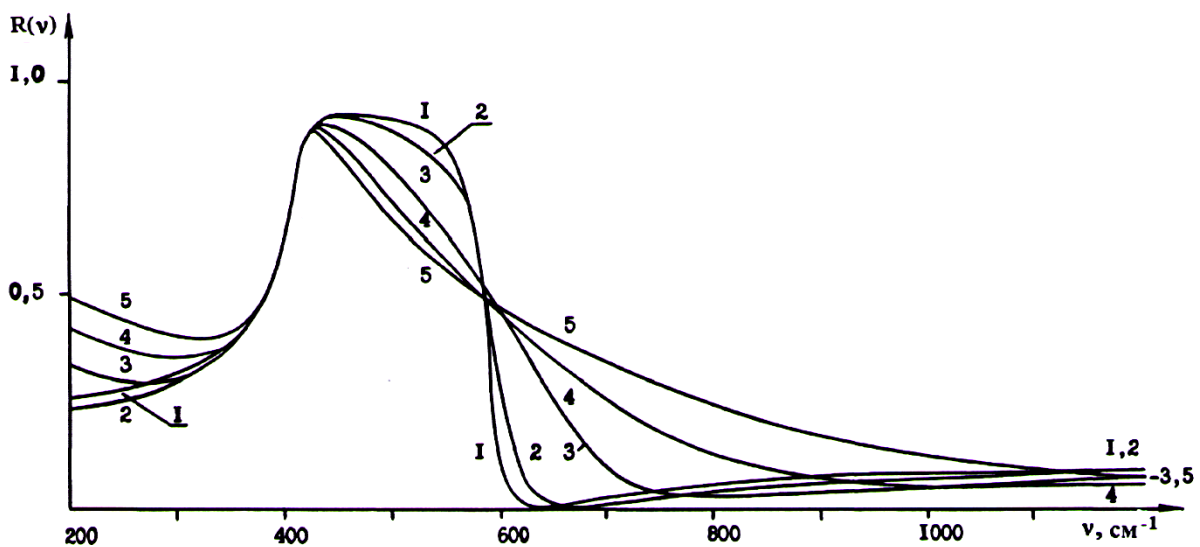
Параметри монокристалів ZnO, одержані при порівнянні розрахункових  $RT(\nu)$  і експериментальних  $RE(\nu)$  спектрів відбивання

Номер запису	Зразок	$\nu_p, \text{см}^{-1}$		$\gamma_p, \text{см}^{-1}$		$\gamma_f, \text{см}^{-1}$		$\delta \cdot 10^{-2}$	
		$E \perp C$	$E \parallel C$	$E \perp C$	$E \parallel C$	$E \perp C$	$E \parallel C$	$E \perp C$	$E \parallel C$
1	ZO1-3	90	100	150	170	13	13	2,9	2,9
2	ZO1-3	82	103	145	159	13	13	34	36
3	ZO1-3	80	105	140	160	12,5	12,5	2,9	3,2

Як відомо [12, 17], кожен із параметрів  $\gamma_f$ ,  $\nu_p$ ,  $\gamma_p$  має суттєвий вплив на зміну коефіцієнта відбивання у певній ділянці спектра, характерній для заданого напівпровідника.

На мал. 2 показано розрахункові залежності коефіцієнтів зовнішнього ІЧ-відбивання від частоти  $\nu$  для монокристалів ZnO при  $E \perp C$ . При розрахунку коефіцієнта відбивання використано взаємоузгоджені дані, представлені у табл. 1. Концентрація електронів змінюється від  $10^{16}$  до  $5 \cdot 10^{19} \text{см}^{-3}$ , що відповідає зміні плазмової частоти в діапазоні від 1 до  $1000 \text{см}^{-1}$ . Розрахунок кривих 1 – 5 проведено за умови  $\gamma_f = 13 \text{см}^{-1}$  при  $\gamma_{p \perp} = \nu_{p \perp}$ . Істотні зміни у спектрах спостерігаються при концентраціях  $10^{17} - 5 \cdot 10^{19} \text{см}^{-3}$ .

Розрахункові спектри  $RT(\nu)$  показують, що помітний вплив на величину коефіцієнта відбивання ZnO чинять вільні носії зарядів (електрони) при концентраціях  $n_0 \geq 10^{17} \text{см}^{-3}$ . Максимальна зміна коефіцієнта відбивання зареєстрована в області  $200 - 900 \text{см}^{-1}$ . Більш точний аналіз вказує, що істотні розбіжності між кривою 1 та кривими 2 – 5 проявляються в області частот  $200 - 350$  і  $430 - 800 \text{см}^{-1}$ . Це означає, що при концентраціях  $n_0 \geq 10^{17} \text{см}^{-3}$  дисперсійний аналіз спектрів  $R(\nu)$  дозволяє з достатньою точністю визначити частоту плазмового резонансу та коефіцієнти затухання плазмонів при використанні виділених частотних діапазонів. Авторами [18] встановлено, що зміна коефіцієнта затухання  $\gamma_f$  від 1 до  $40 \text{см}^{-1}$  призводить до зменшення коефіцієнта зовнішнього відбивання  $R(\nu)$  в області частоти поперечного оптичного фону. Крім того, надійність відомостей, що отримуються із спектра відбивання в області максимуму, як відомо, істотно залежить і від стану поверхні. Тому для кожного окремого випадку ретельно підбирається технологія обробки поверхні з метою зняття порушеного шару, властивості якого відрізняються від об'ємних [12, 18].



Мал. 2. Теоретичні спектри ІЧ-відбивання  $RT(\nu)$  від поверхні ZnO при  $E \perp C$ :  $\nu_{p \perp} = \gamma_{p \perp} = 1, 250, 500, 750, 1000 \text{см}^{-1}$ ,  $\gamma_{f \perp} = 13 \text{см}^{-1}$ .

На мал. 1 (вставка) представлено експериментальні (точки 1) та розрахункові (крива 3) спектри зовнішнього відбивання в діапазоні від  $600 - 800 \text{ см}^{-1}$ . Дисперсійний аналіз спектрів зовнішнього відбивання проведено за методикою, описаною вище, при використанні математичної моделі з адитивним вкладом в діелектричну проникність фононної і плазмової складових. Враховуючи, що у вказаній області спектра на коефіцієнт зовнішнього відбивання впливають лише концентрації та рухливості вільних носіїв зарядів, дисперсійний аналіз здійснювався за двома параметрами: коефіцієнта затухання  $\gamma_p$  і частоти плазмонних коливань  $\nu_p$ , які в подальшому, як і в попередньому випадку, використовуються для розрахунку електрофізичних властивостей монокристала оксиду цинку. Отримані параметри наведено у табл. 2 під записом 2. Як видно з рисунка, спостерігається значно краще узгодження між експериментом (точки 1) та розрахунковими даними (крива 3). Значення  $\delta$  зменшилось із 0,34 до 0,029 при  $E \perp C$  і від 0,36 до 0,032 при  $E \parallel C$ . Слід відмітити, що в обох випадках використовувались одні й ті самі експериментальні дані. Запис 3 у табл. 2 представляє усереднені параметри для монокристала оксиду цинку (зразок ZO1-3), отримані методом Холла та за допомогою дисперсійного аналізу спектрів порушеного повного внутрішнього відбивання [12, 17].

Порівняння параметрів у записах 1 і 3 (див. табл. 2) вказує на розбіжність у межах 12,5 % для  $\nu_p$  і 7 % для  $\gamma_p$  за  $E \perp C$ . При порівнянні записів 2 і 3 розбіжність становить відповідно 2,5 % для  $\nu_p$  і 3,5 % для  $\gamma_p$  за  $E \perp C$ . Крім того, час реєстрації експериментальних даних та дисперсійного аналізу коефіцієнтів відбивання у п'ять разів менший, а точність отриманих даних значно вища у порівнянні з класичною обробкою всього спектра. Розрахункова крива 3 на мал. 1 отримана при підстановці коефіцієнта затухання  $\gamma_p$  і частоти плазмонних коливань  $\nu_p$  із запису 2 (табл. 2). Усереднене значення  $\delta \approx 0,2$  також вказує на переваги дисперсійного аналізу спектра зовнішнього відбивання в обмеженому частотному діапазоні. Що стосується коефіцієнта затухання фононної підсистеми та врахування якості обробки поверхні, то ці параметри потребують додаткових досліджень.

### Література

1. Алфёров Ж.И. Полупроводниковая революция XX века // Российские нанотехнологии. – 2010. – Т. 5. – № 6. – С. 3 – 12.
2. Венгер Е.Ф., Мельничук А.В., Стронский А.В. Фотостимулированные процессы в халькогенидных стеклообразных полупроводниках и их практическое применение. – К.: Академперіодика, 2007. – 284 с.
3. Борисенко В.Е. Нанoeлектроника – основа информационных систем XXI века // Соросовский Образовательный Журнал. – 1997. – № 5. – С. 100 – 104.
4. Курносое А.И., Юдин В.В. Технология производства приборов и интегральных микросхем: Уч. пособие. – 3-е изд. – М.: Высш. школа, 1986. – 368 с.
5. Полупроводниковые приборы: Диоды. Оптоэлектронные приборы: Справочник. – М.: Советское радио, 1996. – 592 с.
6. Кардона М. Основы физики полупроводников / Пер. с англ. И.И. Решиной; Под ред. Б.П. Захарчени. – 3-е изд. – М.: Физматлит, 2002. – 560 с.
7. Павлов Л.П. Методы измерения параметров полупроводниковых материалов: Учебник. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1987. – 239 с.
8. Bundemann C., Rahm A., Lorenz M., Grundmann M. and Schubert Mathias Infrared optical properties of  $\text{Mg}_{x-1}\text{Zn}_{1-x}\text{O}$  thin films ( $0 \leq x \leq 1$ ): Long-wavelength optical phonons and dielectric constants // Faculty Publications from Nebraska Center for Materials and Nanoscience. Paper 12. – 2006. – P. 113541\_1 – 113504\_11.
9. Чеховський С.А. Математичне моделювання фізичних процесів: Навч. посібник. – Івано-Франківськ: Факел, 2003. – 174 с.
10. Томашевський В.М. Моделювання систем: Підручник – К.: Вид. група ВHV, 2007. – 352 с.
11. Баранский П.И., Клочков В.П., Потыкевич И.В. Полупроводниковая электроника: Свойства материалов: Справочник. – К.: Наук. думка, 1975. – 704 с.
12. Венгер Е.Ф., Мельничук О.В., Пасічник Ю.А. Спектроскопія залишкових променів: Монографія. – К.: Наук. думка, 2001. – 192 с.

13. Венгер Є.Ф., Мельничук Л.Ю., Мельничук О.В., Коровіна І.О. Синтез та властивості монокристалів CdS // Фізико-математичний збірник: Збірник наук. праць. – Ніжин: НДУ ім. М. Гоголя, 2006. – С. 24 – 32.
14. Венгер Є.Ф., Макуха О.В., Мельничук Л.Ю., Мельничук О.В. Спектри ІЧ-відбивання монокристалів ВеО в області залишкових променів // Фізико-математичний збірник: Збірник наук. праць. – Ніжин: НДУ ім. М. Гоголя, 2006. – С. 18 – 24.
15. Бовина Л.А., Стафеев В.И. Физика соединений  $A^{III}B^{VI}$  / Под ред. А. Н. Георгобиани, М. К. Шейнкмана. – М.: Наука, 1986. – 319 с.
16. Кузьмина И.П., Никитенко В.А. Окись цинка. Получение и оптические свойства. – М.: Наука, 1984. – 166 с.
17. Уханов Ю.И. Оптические свойства полупроводников: Монография / Под ред. В.М. Тучкевича. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977. – 368 с. – (Серия: «Физика полупроводников и полупроводниковых приборов»).
18. Venger E.F., Melnichuk A.V., Melnichuk L.Ju., Pasechnik Ju.A. Anisotropy of the ZnO Single Crystal Reflectivity in the Region of Residual Rays // Physica Status Solidi (b). – 1995. – Vol. 188, N 2. – P. 823 – 831.
19. Ковтонюк Н.Ф., Концевой Ю.А. Измерения параметров полупроводниковых материалов. – М.: Металлургия, 1970. – 432 с.
20. Батавин В.В., Концевой Ю.А., Федорович Ю.В. Измерения параметров полупроводниковых материалов и структур. – М.: Радио и связь, 1985. – 264 с.

УДК 517.958

## ПІДВИЩЕННЯ РОЗДІЛЬНОЇ ЗДАТНОСТІ МЕТОДУ АЛЕНЦЕВА-ФОКА ПРИ ДЕКОМПОЗИЦІЇ СКЛАДНИХ СПЕКТРІВ КАТОДОЛЮМІНІСЦЕНЦІЇ НАПІВПРОВІДНИКОВИХ ГЕТЕРОСТРУКТУР

О.Г. Шевчук

**Постановка проблеми.** Явище катодолюмінісценції – виникнення світлового випромінювання в ультрафіолетовій, видимій і інфрачервоній областях спектра від електронного опромінювання – відоме досить давно. Останнім часом у зв'язку із широким розвитком оптоелектроніки цікавість до катодолюмінісценції (КЛ) істотно зросла, оскільки дане явище широко застосовується для контролю параметрів напівпровідникових матеріалів та приладів.

Люмінесцентні методи все ширше використовуються як методи визначення ступеня можливості використання вихідних матеріалів для виготовлення як дискретних напівпровідникових приладів, так і інтегральних схем. Перевага люмінесцентних методів полягає в тому, що вони є безконтактними і, в основному, неруйнуючими. Спектри люмінесценції дуже чутливі до наявності в люмінофорах оптично активних домішок і власних дефектів.

Тверді розчини групи  $A^{III}B^V - A^{II}B^{VI}$ , зокрема  $(GaP)_x(ZnSe)_{1-x}$  і  $(GaAs)_x(ZnSe)_{1-x}$  є матеріалами, зручними для досліджень. Вони є повністю розчинними і мають характерну, близьку до квадратичної, залежність ширини забороненої зони від співвідношення компонент.

Збудження електронами з енергією, що перевищує ширину забороненої зони, використовують при вимірюванні власної, домішкової і міждомішкової фотолюмінесценції. Енергію електронів порядку глибини залягання домішкових рівнів, використовують для збудження домішкової або внутрішньоцентрової люмінесценції.

Люмінесценція, збуджена електронами з енергією  $h\nu_b > E_g$ , відбувається при рекомбінації носіїв заряду в області, ширина якої визначається величиною  $\alpha^1 + L_d$ , де  $\alpha$  – коефіцієнт поглинання при енергії електрона  $h\nu_b$ , а  $L_d$  – довжина дифузного зміщення нерівноважних носіїв заряду. У випадку різкого краю власного поглинання, малих значень  $L_d$  і при умові  $h\nu \gg E_g$  ( $\alpha \approx 10^5 \text{ см}^{-1}$ ) генерація і рекомбінація відбуваються в тонкій приповерхневій області кристала.

Якщо енергія збуджуючого електрона перевищує ширину забороненої зони у два або у більше число разів, то при поглинанні генеруються високоенергетичні носії заряду, які можуть

утворювати нові пари шляхом ударної іонізації. Таким чином, один високоенергетичний електрон з такою енергією може генерувати дві пари носіїв.

**Аналіз публікацій.** Існує велика кількість різних як органічних так і неорганічних речовин, які можуть люмінесцентно світитись, властивості якого можуть бути різними. Ці відмінності викликають необхідність в класифікації явищ люмінесценції.

В основу першої спроби такої класифікації була покладена тривалість процесу випромінювання [2]. В результаті такої класифікації всі відомі види були розділені на два великих класи, які отримали назву флуоресценції і фосфоресценції. В основу другого типу було покладено різні види збудження люмінесценції.

В основу третього виду класифікації, запропонованого С.І. Вавиловим, покладена кінетика самого процесу люмінесценції [7]. Згідно йому світіння поділяють на спонтанне, вимушене та резонансне. Резонансною флуоресценцією називається процес випромінювання фотонів тієї ж енергії, що і у поглинутих фотонів збуджуючого світла. Цей тип має місце у кристалах.

Для десуперпозиції (розкладання) складних спектрів люмінесценції на елементарні гаусові смуги використовуються відомі з 60-х років метод Аленцева та його модифікація – метод Фока [1], котрий більше відомий як метод Аленцева-Фока (АФ-метод). В останні роки були запропоновані і інші методи аналізу складних спектрів люмінесценції (зокрема, катодолюмінесценції), в тому числі ті, які традиційно відносять до неруйнівних аналітичних методів [3 – 4, 8]. Проте, практично у всіх зазначених вище методах, автори обмежуються лише визначенням параметрів центрів катодолюмінесценції не приводячи необхідних оцінок похибок обчислень та опису меж застосування своїх теорій.

**Мета роботи.** Основним недоліком цього методу Аленцева-Фока є його постулатна частина, в якій аргію приймається, що спектри випромінювання складаються з двох індивідуальних смуг. Розклад складних спектрів на індивідуальні смуги на основі цього постулату є порівняно нескладною справою, але сам він накладає суттєві обмеження на застосування АФ-методу. В зв'язку з цим нами було поставлене завдання розробити метод де суперпозиції складних спектрів люмінесценції котрий би не базувався на вказаному постулаті. Опису цього методу та результатів його застосування і присвячена ця стаття.

**Виклад основного матеріалу дослідження.** Припустимо, що на складних кривих люмінесценції  $f(\lambda)$  існують ділянки, де виявляються тільки окремі її елементарні смуги  $\varphi_i(\lambda)$ . Для всіх  $i = 1...n$  спектри записуються двічі при різних значеннях інтенсивності збудження, що є необхідною умовою подальшого процесу де суперпозиції.

Як зазначено в [1], криві  $f_j(\lambda)$  можна задати у вигляді

$$f_j(\lambda) = \sum_{i=1}^n \varphi_{ji}(\lambda), \quad (1)$$

де  $\varphi_{ji}(\lambda)$  – залежність інтенсивності індивідуальної  $i$ -ї смуги люмінесценції від довжини хвилі  $\lambda$ .

Значення  $j$  в (1) відповідають двом різним інтенсивностям збудження люмінесценції при одному і тому ж значенні  $\lambda$ . Як показано в [1],

$$\varphi_{(j+1)i}(\lambda) = b_i \varphi_{ji}(\lambda) \quad / b_i \in R \quad (2)$$

Нехай спектр складається тільки з двох індивідуальних смуг. Позначимо через  $\Delta f_j$  та  $\mu_{oj}$  похибку вимірювання  $f_j(\lambda)$  та граничну відносну похибку відповідно. Ділянки спектра, для яких

$$\rho_j(\lambda) = \left| \frac{\Delta f_j(\lambda)}{f_j(\lambda)} \right| > \mu_{oj} \quad (3)$$

виключаємо з подальшого розкладу.

Нехай  $a(\lambda) = f_2(\lambda)/f_1(\lambda)$ . Тоді відносна похибка у визначенні  $a(\lambda)$  визначається виразом:

$$\left| \frac{\Delta a(\lambda)}{a(\lambda)} \right| = \rho_1(\lambda) + \rho_2(\lambda) = \rho(\lambda) \leq 2\mu_o \quad (4)$$

Таким чином

$$\Delta a(\lambda) \leq a(\lambda) \rho(\lambda) / f_1(\lambda) \quad (5)$$

( $|\Delta a(\lambda)| = \Delta a(\lambda)$ ;  $|a(\lambda)| = a(\lambda)$ , оскільки  $\Delta a(\lambda) > 0$ ,  $a(\lambda) > 0$ ).

Позначимо через  $\lambda_1^*, \lambda_2^*$  значення  $\lambda$ , для яких  $\rho_j(\lambda) > \mu_{oj}$ . Визначимо  $\lambda_{max} = \max(\lambda_1^*, \lambda_2^*), \lambda_{min} = \min(\lambda_1^*, \lambda_2^*)$ . Тоді для любого  $\lambda \in (\lambda_{min}, \lambda_{max})$   $a(\lambda) = a(\lambda) \pm \Delta a(\lambda)$ , де  $a(\lambda)$  визначається з (5). Позначимо:

$$a^\pm(\lambda) = a(\lambda) \pm \Delta a(\lambda) \quad (6)$$

Знаходимо значення довжини хвиль для яких справджується умова:

$$(a^-(\lambda_{k-1}^*) \geq a^+(\lambda_k^*)) \vee (a^+(\lambda_{k-1}^*) \leq a^-(\lambda_k^*)) \quad (7)$$

Процес (7) фактично задає області інваріантності  $a(\lambda)$  що визначаються виразом (5). При цьому на ділянках спектральних кривих, на яких «діють» індивідуальні смуги  $\varphi_j$  люмінесценції  $a(\lambda)$  дорівнює коефіцієнту  $b_i$  в розкладі (2), тобто на цих ділянках  $a(\lambda) = const$ ; але ж процес (7) забезпечує виявлення саме таких ділянок. Записуючи систему рівнянь (1) для ділянок інваріантності  $a(\lambda)$  одержимо:

$$\begin{cases} \varphi_{j(k+1)}(\lambda) = \frac{a_{k+2} f_{k+1}(\lambda) - f_{k+2}(\lambda)}{a_{k+1} - a_k}, \\ \varphi_{j(k+2)}(\lambda) = \frac{f_{k+2}(\lambda) - a_k f_{k+2}(\lambda)}{a_{k+1} - a_k}, \end{cases} \quad (8)$$

У випадку, коли залежності  $f_j(\lambda)$  попередньо нормувались на максимум їх інтенсивності, система (8) приймає форму:

$$\begin{cases} \varphi_{jk}(\lambda) = \frac{f_2^{H2}(\lambda) - \tilde{a}_{k+1} f_1^{H1}(\lambda)}{\tilde{a}_{k+1} - \tilde{a}_k}, \\ \varphi_{j(k+1)}(\lambda) = \frac{f_2^{H2}(\lambda) - \tilde{a}_k f_1^{H1}(\lambda)}{\tilde{a}_{k+1} - \tilde{a}_k}, \end{cases} \quad (9)$$

де:

$$\begin{aligned} f_j^{Hj}(\lambda) &= f_j(\lambda) / f_j^{max}(\lambda), \quad f_j^{max}(\lambda) = \max f_j(\lambda) \quad / j=1,2/, \\ \varphi_{jk}^{Hj}(\lambda) &= \varphi_{jk}(\lambda) / f_j^{max}; \quad \tilde{a}_k = f_j^{Hj}(\lambda_k^*) / f_1^{H1}(\lambda_k^*) = a(\lambda_k^*) f_{1,2}^{max}, \\ f_{1,2}^{max} &= f_1^{max} / f_2^{max}. \end{aligned}$$

Звідси легко знайти вираз для обчислення середньоквадратичної похибки в обчисленні  $\varphi_{jk}(\lambda)$ :

$$\left| \frac{\Delta \varphi_{j(k+1)}(\lambda)}{\varphi_{j(k+1)}(\lambda)} \right| = \left[ \frac{(1+a_k) \cdot \Delta f + f_1(\lambda) \cdot \Delta a}{f_2(\lambda) - a_k f_1(\lambda)} \right]^2 + \left[ \frac{2 \cdot \Delta a}{a_{k+1} - a_k} \right]^2, \quad (10)$$

де  $\Delta a = \Delta a_{k+1} = \Delta a_k$  для всіх  $k / j = 1, 2/$ .

Аналіз виразу (10) показує, що надійні результати можна отримати лише при виконанні умови:

$$\left[ (1+a_k) \Delta f + f_1(\lambda) \Delta a \right] \ll (f_2(\lambda) - a_k f_1(\lambda)) \quad \& \quad 2 \Delta a \ll (a_{k+1} - a_k) \quad (11)$$

Абсолютна ж похибка у визначенні  $\varphi_{j(k+1)}(\lambda)$  визначається з:

$$\Delta \varphi_{j(k+1)}(\lambda) = \varphi_{j(k+1)}(\lambda) \left[ \frac{(1+a_k) \cdot \Delta f + f_1(\lambda) \cdot \Delta a}{f_2(\lambda) - a_k f_1(\lambda)} + \frac{2 \cdot \Delta a}{a_{k+1} - a_k} \right] \quad (12)$$

$/ j = 1, 2/$ .

**Висновки та перспективи подальших досліджень.** Апробація методу здійснювалась на складних спектрах домішкової катодолюмінесценції епітаксціальних шарів твердих розчинів  $(\text{CaAs})_x(\text{ZnSe})_{1-x}$  ( $x \leq 0.20$  – молярна доля арсеніду галію в твердому розчині), експериментально досліджених раніше в [2] в області температур 4,2 ... 296К. Для всіх досліджених зразків характерні широкі експериментальні криві негаусової форми в області 1,5 ... 2,5 еВ. Наявність на них перегинів, виступів, свідчить про те, що вони складаються з кількох елементарних смуг, зумовлених різними центрами випромінювальної рекомбінації. Отримані кількісні результати співпадають з результатами аналізу таких кривих в роботах [4, 6], що свідчить про їх достовірність.

Таким чином, запропонований метод дає можливість достатньо точно здійснювати десуперпозицію складних спектрів люмінесценції на елементарні гаусові складові і визначати їх внесок в інтегральну люмінесценцію та енергетичне положення максимумів. Основним його обмеженням є необхідність знімати спектри при двох різних рівнях збудження.



Залишається остаточно нез'ясованою можливість використання методу інжекційної спектроскопії для дослідження глибоких пасток у моно- та полікристалічних матеріалах типових напівпровідників, не визначені остаточно роздільна здатність, межі застосування та обмеження методу.

Залишається також недослідженим вплив ряду експериментальних чинників, зокрема температури вимірювання, фактора спінового виродження та інших на точність визначення параметрів глибоких центрів.

### Література

1. Фок М.В. Разделение сложных спектров на индивидуальные полосы при помощи обобщенного метода Аленцева // Тр. ФИАН СССР, т.59, 1972.
2. Блад Д. Методы измерения электрических свойств полупроводников / Д. Блад, Дж. В. Ортон; [пер. с англ. Ф. П. Тарасенко] // Зарубежная радиоэлектроника. – 1981. – Т. 2. – С. 3 – 49, – Т. 3. – 350 с.
3. Воробьев В.Ю. Методы исследований полупроводников / Воробьев В. Ю., Добровольский В.И., Стриха В. И. – К.: Вища школа, 1988. – 232 с.
4. Као К. Перенос электронов в твердых телах / Као К., Хуанг В.; [пер. с англ. З. З. Высоцкого; под ред. Г. Е. Пикуса]. – М.: Мир, 2004. – 368 с.
5. Стечкин С. Б. Сплайны в вычислительной математике / Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. – Москва: Наука, 2006. – 248 с.
6. Nespurek S. Space-charge-limited currents in insulators with the gaussian distribution of traps / S. Nespurek, P. Semejtek // Czech. J. Phys (B). – 1972. – V. 22. – P. 160 – 175.
7. Schauer F. The bulk trap spectroscopy of solids by temperature-modulated space-charge-limited currents (TMSCLC): Application to real crystalline and amorphous semiconductors / F. Schauer, S. Nespurek and O. Zmeskal // Journal of Physics C: Solid State Physics. – 2006. – V. 19, № 36. – 7231 p.
8. Zmeskal O. The bulk trap spectroscopy of solids by temperature-modulated space-charge-limited currents (TMSCLC) in the steady state / O. Zmeskal, F. Schauer and S. Nespurek // Journal of Physics C: Solid State Physics. – 2005. – V. 18, № 9. – P. 1873 – 1884.



# Інформатика

УДК 004.382.2

## TOP 10 СУПЕРКОМП'ЮТЕРІВ ІЗ СПИСКУ TOP 500

І.М. Глушко

### Вступ

Є велика кількість задач, розв'язання яких вимагає використання великих обчислювальних потужностей, які часто недоступні для звичайних обчислювальних систем. До таких задач насамперед належать різноманітні фундаментальні наукові або інженерні задачі з широкою сферою застосування. Це задачі прогнозування погоди та змін клімату, геологічних катаклізмів і руйнівних ураганів, дослідження в ядерній фізиці та газо- і гідродинаміці, розшифрування геному людини та створення генетичних банків даних. Оскільки звичайні комп'ютери не дозволяють ефективно вирішити поставлені задачі, виникла потреба у створенні потужних паралельних (суперкомп'ютерних) обчислювальних ресурсів та розподілених обчислювальних систем.

Паралельні та розподілені обчислення охоплюють декілька широких областей, таких як розробка паралельних машин та розподілених систем, паралельні мови програмування, розробка паралельних алгоритмів і їх аналіз, а також питання, пов'язані з застосуванням. У даній статті мова піде про сучасні найпотужніші суперкомп'ютерні обчислювальні ресурси.

### Основні поняття та проблеми паралельних обчислень

Паралельні обчислення – це обчислення, що підтримуються на математичному, алгоритмічному, програмному чи апаратному рівні (на всіх або декількох) і забезпечують можливість паралельного виконання задачі [1]. Іншими словами, під паралельними обчисленнями можна розуміти процеси обробки даних, в яких одночасно можуть виконуватися кілька обчислювальних операцій. Паралельні обчислення складають основу суперкомп'ютерних технологій і високопродуктивних розрахунків.

Проблематика паралельних обчислень є надзвичайно широкою і зазвичай підрозділяється на наступні напрямки:

- розробка паралельних обчислювальних систем;
- аналіз ефективності паралельних обчислень для оцінки одержуваного прискорення і ступеня використання всіх можливостей комп'ютерного обладнання при паралельних способах розв'язання задач;
- створення і розвиток паралельних алгоритмів для розв'язання прикладних задач;
- розробка паралельних програмних систем;
- створення і розвиток системного програмного забезпечення для паралельних обчислювальних систем.

### Області застосування і задачі паралельної обробки

Хоча продуктивність сучасних комп'ютерів щорічно зростає є велика кількість задач, для розв'язання яких необхідні більш потужні обчислювальні ресурси. В таких задачах необхідно забезпечити: надвисоку швидкодію, великий об'єм оперативної пам'яті, велику кількість інформації, що передається, обробку і зберігання великого об'єму інформації. До даного кола задач належать задачі з класу "великих проблем" (англ. Grand challenges) – це фундаментальні наукові або інженерні задачі з широкою сферою застосування, ефективне вирішення яких можливе лише з використанням потужних (суперкомп'ютерних) обчислювальних ресурсів. Перелік цих задач був опублікований у 90-х роках ХХ ст. Національним науковим фондом (NSF) у США та зокрема включав:

- глобальний прогноз погоди та змін клімату;
- розшифрування геному людини;

- розрахунок турбулентності в моделюванні газо- і гідродинаміки;
- задачі динаміки автомобіля;
- моделювання океанських течій;
- візуальну динаміку потоків;
- моделювання надпровідності;
- квантову хромодинаміку;
- обробку зображень.

З розвитком глобальної мережі Internet до них додалися нові проблеми, пов'язані з мережними технологіями, а саме: цифрові бібліотеки, електронна комерція та інші.

Досягнення в розв'язанні цих та інших "великих" задач були досить значними. Так, комп'ютерне моделювання геному людини (2000 р.) дозволило з'ясувати, що людський організм включає не 120 тис. різних генів, як передбачали біологи, а значно менше – прядка 30 тис [2].

Досить серйозною є задача прогнозування погоди. При цьому атмосфера розбивається на окремі просторові зони. Обчислення в кожній зоні повторюються багато разів. Якщо об'єм зони  $1 \text{ км}^3$ , то для моделювання 10 км атмосфери необхідно  $5 \times 10^8$  таких зон. Припустимо, що обчислення в кожній зоні вимагає 200 операцій з плаваючою комою, тоді за один часовий крок необхідно виконати  $10^{11}$  операцій з плаваючою комою. Для того, щоб прогнозувати погоду з передбачуваністю 10 днів з 10-ти хвилинним кроком комп'ютеру з продуктивністю 100 Mflops необхідно  $10^7$  секунд чи понад 100 днів. Для того, щоб провести розрахунок за 10 хв., необхідний комп'ютер продуктивністю 1,7 Tflops [1].

Великими обсягами обчислень характеризується комп'ютерне моделювання задач газо- і гідродинаміки. Наприклад, гідродинамічні процеси при видобутку нафти, за умови розгляду області моделювання протягом  $10^3$  кроків моделювання і обсягом  $10^6$  дискретних точок, в кожній з яких оцінюється значення 10 функцій, що вимагають порядку  $10^3$  операцій, матимуть обчислювальну складність порядку  $T=10^3 * 10^6 * 10^3 * 10=10^{13}$  операцій з плаваючою комою. Виконання цього завдання за 10 секунд вимагатиме продуктивності паралельної системи порядку 1 Tflops. Така продуктивність досяжна на сьогодні тільки для мультипроцесорних систем, що складаються з тисяч процесорів [2].

Астрофізики використовують суперкомп'ютери для моделювання зіткнень галактик [3]. Професор астрономії Джон Дубінські змоделивав взаємодію між Чумацьким шляхом і Андромедою, простеживши рух 100 мільйонів зірок і частинок матерії під дією сил взаємної гравітації. З'ясувалося, що протягом трьох мільярдів років наш Чумацький Шлях буде поглинутий галактикою Андромеда. Паралельне моделювання тривало протягом чотирьох днів на 1152-процесорному суперкомп'ютері BlueHorizon – це система IBM RS/6000 SP3 в суперкомп'ютерному центрі Сан Дієго (SDSC). Слід зазначити, що таке моделювання вимагало б трьох років безперервного розрахунку на робочій станції. Результатом роботи стала наочна, з високою роздільною здатністю візуалізація зіткнення і об'єднання двох галактик з початку процесу до його закінчення, а також деякі дуже докладні "знімки" структури і динаміки об'єднання галактик.

Деяка статистика 47 редакції списку TOP500 найпотужніших суперкомп'ютерів світу.

Перша версія списку TOP500 найпотужніших суперкомп'ютерів світу була презентована у червні 1993 року на конференції у Германії. У листопаді цього ж року її автори вирішили повернутися до цього списку, щоб з'ясувати чи відбулися зміни в даній області. З того часу оновлення списку TOP500 є однією з найочікуваніших і найпопулярніших подій, яка відбувається двічі на рік – у червні та листопаді. Авторами даного списку є Erich Strohmaier Horst Simon з Національної лабораторії Лоуренса в Берклі, Jack Dongarra з Університету штату Теннессі, Ноксвілл і Martin Meuer з ISC Group, Німеччина.

У червні 2016 року на сайті <https://www.top500.org> опубліковано 47-му редакцію списку найпотужніших суперкомп'ютерів світу. У табл. 1 подано коротку характеристику перших 10-ти суперкомп'ютерів з цього списку, де Rmax – це продуктивність за тестом Linpack, Rpeak – пікова продуктивність [4].

Нарешті у списку TOP 500 відбулися довгоочікувані зміни. Перше місце зайняв китайський суперкомп'ютер Sunway Taihu Light [5], який за тестом Linpack має продуктивність приб-

ливно в 3 рази вищу, ніж його попередник Tianhe-2 та в 5 разів вищу, ніж найпотужніший американський представник. У табл. 3 подано його основні параметри. Назва Sunway Taihu Light перекладається як «божественна (магічна) сила світла Тайху». Тайху – це озеро біля провінції Усі в Китаї. Даний суперкомп'ютер призначено для складних розрахунків, потрібних у виробництві, медицині, при прогнозуванні погоди і аналізу «великих даних».

Таблиця 1

## Список TOP10 за червень 2016р.

№	Місцезнаходження	Система	Ядра	Rmax (TFlop/s)	Rpeak (TFlop/s)
1.	National Supercomputing Center in Wuxi, China	Sunway TaihuLight - Sunway MPP, Sunway SW26010 260C 1.45GHz, Sunway, NRCPC	10 649600	93 014,6	125 435,9
2.	National Super Computer Center in Guangzhou, China	Tianhe-2 (MilkyWay-2) - TH-IVB-FEP Cluster, Intel Xeon E5-2692 12C 2.200GHz, TH Express-2, Intel Xeon Phi 31S1P, NUDT	3 120000	33 862,7	54 902,4
3.	DOE/SC/Oak Ridge National Laboratory, United States	Titan - Cray XK7 , Opteron 6274 16C 2.200GHz, Cray Gemini interconnect, NVIDIA K20x, Cray Inc.	560640	17 590,0	27 112,5
4.	DOE/NNSA/LLNL, United States	Sequoia - BlueGene/Q, Power BQC 16C 1.60 GHz, Custom, IBM	1 572864	17 173,2	20 132,7
5.	RIKEN Advanced Institute for Computational Science (AICS), Japan	K computer, SPARC64 VIIIfx 2.0GHz, Tofu interconnect, Fujitsu	705024	10 510,0	11 280,4
6.	DOE/SC/Argonne National Laboratory, United States	Mira - BlueGene/Q, Power BQC 16C 1.60GHz, Custom,	786432	8 586,6	10066,3

		IBM			
7.	DOE/NNSA/LANL/SNL, United States	Trinity - Cray XC40, Xeon E5-2698v3 16C 2.3GHz, Aries interconnect, Cray Inc.	301056	8 100,9	11 078,9
8.	Swiss National Supercomputing Centre (CSCS) Switzerland	Piz Daint - Cray XC30, Xeon E5-2670 8C 2.600GHz, Aries interconnect, NVIDIA K20x, Cray Inc.	115984	6 271,0	7 788,9
9.	HLRS - Hochleistungsrechenzentrum Stuttgart, Germany	Hazel Hen - Cray XC40, Xeon E5-2680v3 12C 2.5GHz, Aries interconnect, Cray Inc.	185088	5 640,2	7 403,5
10.	King Abdullah University of Science and Technology, Saudi Arabia	Shaheen II - Cray XC40, Xeon E5-2698v3 16C 2.3GHz, Aries interconnect, Cray Inc.	196608	5 537,0	7 235,2

Особливістю даного суперкомп'ютера є те, він повністю побудований на базі процесорів розроблених і виготовлених у Китаї. У квітні 2015 року уряд США заборонив Intel продавати процесори в Китай для оновлення суперкомп'ютера Tianhe-2. Проте вже у червні 2016 року вся спільнота дізналася про нову китайську високопродуктивну систему, виготовлену на основі власних комплектуючих.

Таблиця 2

## Sunway Taihu Light

<b>Активність</b>	з 2016 року
<b>Виробник</b>	NRCPC (National Research Center of Parallel Computer Engineering & Technology)
<b>Місцезнаходження</b>	Національний суперкомп'ютерний центр, Усі, провінція Цзян-су, КНР
<b>Процесор</b>	Sunway SW26010 260C 1.45GHz
<b>Операційна система</b>	Sunway Raise OS 2.0.5
<b>Архітектура</b>	MPP
<b>Потужність</b>	15371 kW
<b>Продуктивність</b>	93 014,6 TFlop/s (linpack); 125 435,9 TFlop/s (теоретична пікова)
<b>Офіційний сайт</b>	<a href="http://www.nscwx.cn/">http://www.nscwx.cn/</a>

SunwayTaihu Light має 40960 процесорів SW26010 по 260 ядер в кожному та працює під управлінням власної операційної системи Sunway Raise OS 2.0.5 на базі Linux. Об'єм оперативної пам'яті становить 1,3 Пбайт.

Друге місце у списку теж займає китайський представник Tianhe-2 [6] (див. табл.3). Цей суперкомп'ютер протримався на першому місці з червня 2013 року. На відміну від Sunway Taihu Light, який має архітектуру MPP, Tianhe-2 – це кластер, оснащений 17920 вузлами, кожен з яких містить два 12-ядерних процесори Intel Xeon E5. Об'єм оперативної – 1,4 Пбайт і 12,4 Пбайт для зберігання даних.

Таблиця 3

Tianhe-2

<b>Активність</b>	з 2013 року
<b>Виробник</b>	NUDT
<b>Місцезнаходження</b>	Національний суперкомп'ютерний центр в Гуанчжоу, КНР
<b>Процесор</b>	IntelXeon E5-2692v2 12C 2.2GHz
<b>Операційна система</b>	Kylin Linux
<b>Архітектура</b>	Кластер
<b>Потужність</b>	17 808kW
<b>Продуктивність</b>	33 862,7 TFlop/s (linpack); 54 902,4 TFlop/s (теоретична пікова)
<b>Офіційний сайт</b>	<a href="http://en.nscg-gz.cn/">http://en.nscg-gz.cn/</a>

На третьому місці знаходиться американський суперкомп'ютер Titan [7], який у листопаді 2012 року посів першу позицію у списку TOP 500 і через півроку поступився місцем Tianhe-2. Titan – MPP суперкомп'ютер, побудований на платформі Cray XK7 з гібридною архітектурою (див. табл. 4). Об'єм оперативної пам'яті становить 710 Тбайт і є 10 Пбайт для зберігання даних. Основні області дослідження: кліматичні зміни, атомна енергія, матеріалознавство, турбулентне горіння.

Наступні сім позицій займають суперкомп'ютери США, Японії, Швейцарії, Німеччини та Саудівської Аравії (див. табл. 5-11). Найнижчу продуктивність за тестом Linpack серед них має Shaheen II, який знаходиться в Науково-технологічному університеті імені короля Абдалли. Всі суперкомп'ютери, крім K computer, мають архітектуру MPP.

Таблиця 4

Titan

<b>Активність</b>	2012 року
<b>Виробник</b>	Cray Inc.
<b>Місцезнаходження</b>	Національна лабораторія Ок-Ридж, США
<b>Процесор</b>	Opteron 6274 16C 2.2GHz
<b>Операційна система</b>	Cray Linux Environment
<b>Архітектура</b>	MPP
<b>Потужність</b>	8 209kW
<b>Продуктивність</b>	17590 TFlop/s (linpack); 27 112,5 TFlop/s (теоретична пікова)
<b>Офіційний сайт</b>	<a href="http://www.olcf.ornl.gov/titan/">http://www.olcf.ornl.gov/titan/</a>

Таблиця 5

Sequoia

<b>Активність</b>	з 2011 року
<b>Виробник</b>	IBM
<b>Місцезнаходження</b>	DOE/NNSA/LLNL, США
<b>Процесор</b>	Power BQC 16C 1.6GHz
<b>Операційна система</b>	Linux
<b>Архітектура</b>	MPP
<b>Потужність</b>	7 890kW
<b>Продуктивність</b>	17 173,2TFlop/s (linpack); 20 132,7 TFlop/s (теоретична пікова)
<b>Офіційний сайт</b>	<a href="http://computation.llnl.gov/computers/sequoia">http://computation.llnl.gov/computers/sequoia</a>

Таблиця 6

## K computer

<b>Активність</b>	з 2011 року
<b>Виробник</b>	Fujitsu
<b>Місцезнаходження</b>	Інститут фізико-хімічних досліджень, Японія
<b>Процесор</b>	SPARC64 VIIIfx 8C 2GHz
<b>Операційна система</b>	Linux
<b>Архітектура</b>	Кластер
<b>Потужність</b>	12659,89kW
<b>Продуктивність</b>	10510 TFlop/s (linpack); 11280,384 TFlop/s (теоретична пікова)
<b>Офіційний сайт</b>	<a href="http://www.aics.riken.jp/en/k-computer/about/">http://www.aics.riken.jp/en/k-computer/about/</a>

Таблиця 7

## Mira

<b>Активність</b>	з 2012 року
<b>Виробник</b>	IBM
<b>Місцезнаходження</b>	DOE/SC/Аргонська національна лабораторія, США
<b>Процесор</b>	Power BQC 16C 1.6GHz
<b>Операційна система</b>	Linux
<b>Архітектура</b>	MPP
<b>Потужність</b>	3945 kW
<b>Продуктивність</b>	8586,612 TFlop/s (linpack); 10066,33 TFlop/s (теоретична пікова)
<b>Офіційний сайт</b>	<a href="http://www.anl.gov/mira">http://www.anl.gov/mira</a>

Таблиця 8

## Trinity

<b>Активність</b>	з 2015 року
<b>Виробник</b>	CrayInc.
<b>Місцезнаходження</b>	DOE/NNSA/LANL/SNL, США
<b>Процесор</b>	Xeon E5-2698v3 16C 2.3GHz
<b>Операційна система</b>	Cray Linux Environment
<b>Архітектура</b>	MPP
<b>Потужність</b>	<10 MW
<b>Продуктивність</b>	8100,9 TFlop/s (linpack); 11 078,861 TFlop/s (теоретична пікова)
<b>Офіційний сайт</b>	<a href="http://www.lanl.gov/projects/trinity/specifications.php">http://www.lanl.gov/projects/trinity/specifications.php</a>

Таблиця 9

## PizDaint

<b>Активність</b>	з 2012 року
<b>Виробник</b>	CrayInc.
<b>Місцезнаходження</b>	Швейцарський національний суперкомп'ютерний центр, Швейцарія
<b>Процесор</b>	Xeon E5-2670 8C 2.6GHz
<b>Операційна система</b>	Cray Linux Environment
<b>Архітектура</b>	MPP
<b>Потужність</b>	2325 kW
<b>Продуктивність</b>	6271 TFlop/s (linpack); 7788, 853 TFlop/s (теоретична пікова)
<b>Офіційний сайт</b>	<a href="http://www.cscs.ch/computers/piz_daint_piz_dora/index.html">http://www.cscs.ch/computers/piz_daint_piz_dora/index.html</a>

Таблиця 10

Hazel Hen

<b>Активність</b>	з 2015 року
<b>Виробник</b>	Cray Inc.
<b>Місцезнаходження</b>	Центр високопродуктивних обчислень, Німеччина
<b>Процесор</b>	Xeon E5-2680v3 12C 2.5GHz
<b>Операційна система</b>	Cray Linux Environment
<b>Архітектура</b>	MPP
<b>Потужність</b>	~3200 kW
<b>Продуктивність</b>	5 640,170TFlop/s (linpack); 7 403,520TFlop/s (теоретична пікова)
<b>Офіційний сайт</b>	<a href="http://www.hlrs.de/systems/cray-xc40-hazel-hen/">http://www.hlrs.de/systems/cray-xc40-hazel-hen/</a>

Таблиця 11

Shaheen II

<b>Активність</b>	з 2015 року
<b>Виробник</b>	Cray Inc.
<b>Місцезнаходження</b>	Науково-технологічний університет імені короля Абдалли, Саудівська Аравія
<b>Процесор</b>	Xeon E5-2698v3 16C 2.3 GHz
<b>Операційна система</b>	Cray Linux Environment
<b>Архітектура</b>	MPP
<b>Потужність</b>	2834 kW
<b>Продуктивність</b>	5 536, 990 TFlop/s (linpack); 7 235,174 TFlop/s (теоретична пікова)
<b>Офіційний сайт</b>	<a href="https://ecrc.kaust.edu.sa/Pages/Home.aspx">https://ecrc.kaust.edu.sa/Pages/Home.aspx</a>

### Висновки

У даній статті розглянуто перших десять суперкомп'ютерів із списку TOP500. У табличному вигляді наведено їх основні характеристики. Більш детально проаналізовано суперкомп'ютери, які займають перших три місця.

Загалом можна зробити наступні висновки. Серед розглянутих суперкомп'ютерів вісім має архітектуру MPP, а двоє є кластерними системами. П'ять суперкомп'ютерів вироблені компанією Cray Inc. Лідерами є китайські суперкомп'ютери, які за продуктивністю значно перевершили американських представників і не тільки їх. Вони настільки відірвалися від своїх суперників, що здаються непереможними. Що ж, будемо чекати у листопаді 48-му редакцію списку TOP500, можливо вона теж вразить новими здобутками.

### Література

1. Організація паралельних обчислень: Навчальний посібник з дисципліни "Паралельні та розподілені обчислення" для студентів базового напрямку 6.0915 "Комп'ютерна інженерія" / Укладачі: Є. Ваврук, О. Лашко. – Львів: Національний університет "Львівська політехніка", 2007. – 70 с.
2. Дорошенко А.Ю. Архітектура і операційні середовища комп'ютерних систем : методичний посібник і конспект лекцій / А.Ю. Дорошенко, В.М. Кислоокій, О.Л. Синявський. – К.: Національний університет "Києво-Могилянська академія", 2005. – 220 с.
3. Лаборатория Параллельных информационных технологий НИВЦ МГУ [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.parallel.ru>.
4. TOP500 [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://www.top500.org>
5. Innovation Cooperation Sharing Excellence [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.nscw.cn/>
6. National Supercomputation Center in Guangzhou [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://en.nscg.cn/>
7. Introducing Titan [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.olcf.ornl.gov/titan/>



8. Sequoia[Електронний ресурс]. – Режим доступу:<http://computation.llnl.gov/computers/sequoia>
9. [Електронний ресурс]. – Режим доступу:<http://www.aics.riken.jp/en/k-computer/about/>
10. Whatis K?[Електронний ресурс]. – Режим доступу:<http://www.anl.gov/mira>
11. Trinity[Електронний ресурс]. – Режим доступу:<http://www.lanl.gov/projects/trinity/specifications.php>
12. PizDaint&PizDora[Електронний ресурс]. – Режим доступу:[http://www.cscs.ch/computers/piz\\_daint\\_piz\\_dora/index.html](http://www.cscs.ch/computers/piz_daint_piz_dora/index.html)
13. CRAY XC40 (HAZEL HEN)[Електронний ресурс]. – Режим доступу:<http://www.hlrs.de/systems/cray-xc40-hazel-hen/>
14. ECRC Cray XC40 Supercomputer[Електронний ресурс]. – Режим доступу:<https://ecrc.kaust.edu.sa/Pages/Home.aspx>

УДК 004.65

## **ЗВІТНІСТЬ ТА АНАЛІЗ БАЗ ДАНИХ ЗА ДОПОМОГОЮ DBFORGE STUDIO FOR MYSQL**

**А.В. Павлюк**

Бази даних є найбільш затребуваними в усіх сферах нашого життя. Починаючи з веб-сайтів, якими ми користуємось кожного дня, закінчуючи супермаркетами, банками, державними установами. Для введення, структуризації, обробки, збереження та аналізу необхідної інформації в базах даних, використовуються різноманітні СУБД та інструменти роботи з ними. В даній статті піде мова про один з таких інструментів, а саме dbForge Studio for MySQL. А конкретніше про створення звітів та аналіз інформації за допомогою цього програмного забезпечення.

При роботі з великою кількістю даних виникає необхідність аналізу наявної інформації, та створення звітів. Звіт являє собою форматоване представлення даних, яке виводиться на екран, до друку або в файл. Він дозволяє отримати з бази потрібні відомості і представити їх у вигляді, зручному для сприйняття, а також надає широкі можливості для узагальнення і аналізу даних. При друку таблиць і запитів інформація видається практично в тому вигляді, в якому зберігається. Часто виникає необхідність представити дані у вигляді звітів, які мають традиційний вигляд і легко читаються.

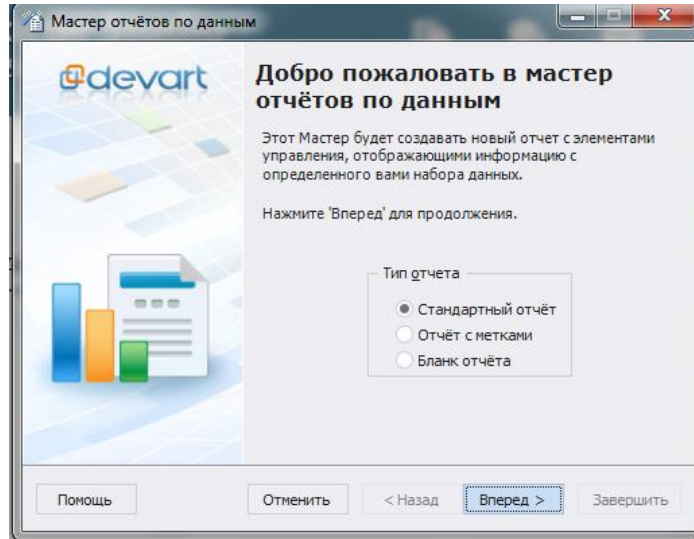
dbForge Studio for MySQL – універсальне рішення для розробки, адміністрування та управління базами даних MySQL і MariaDB. Даний продукт дозволяє створювати і виконувати запити, розробляти і налагоджувати процедури і функції, а також автоматизувати управління об'єктами баз даних MySQL за допомогою зручного для користувача інтерфейсу. dbForge Studio також містить інструменти для порівняння, синхронізації, створення резервних копій баз даних за графіком, а також для аналізу та створення звітів за даними таблиць MySQL.

Основними можливостями для аналізу даних програма має:

- розширені можливості для створення будь-яких звітів за даними за допомогою інструменту звітності для MySQL;
- перетворення строкових даних в змістовні зведені таблиці;
- добре перевірена функціональність.

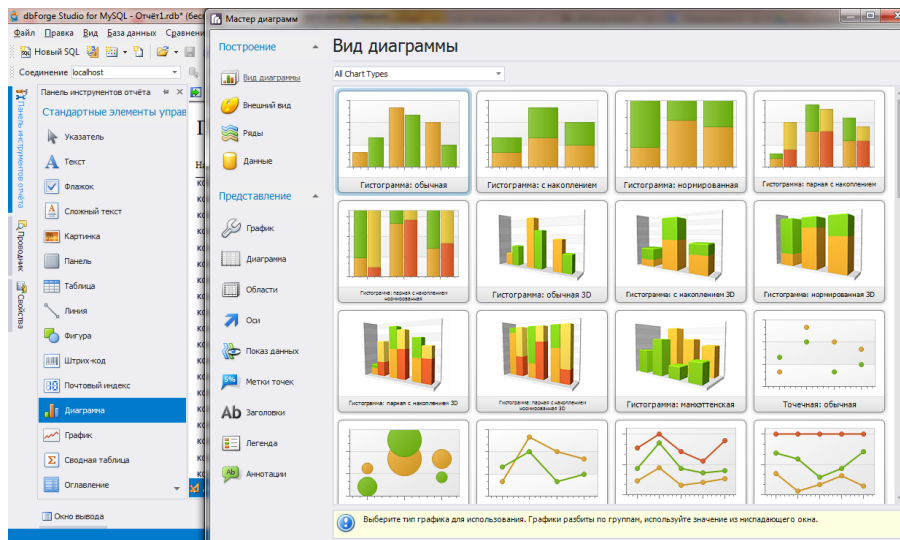
Розглянемо алгоритм створення найпростішого звіту, який в подальшому можна буде редагувати та вдосконалювати.

1. У головному вікні програми необхідно перейти на вкладку «Аналіз даних», де можна вибрати один із запропонованих варіантів, в нашому випадку це створення нового звіту за допомогою майстра.



Мал. 1. Майстер створення звітів

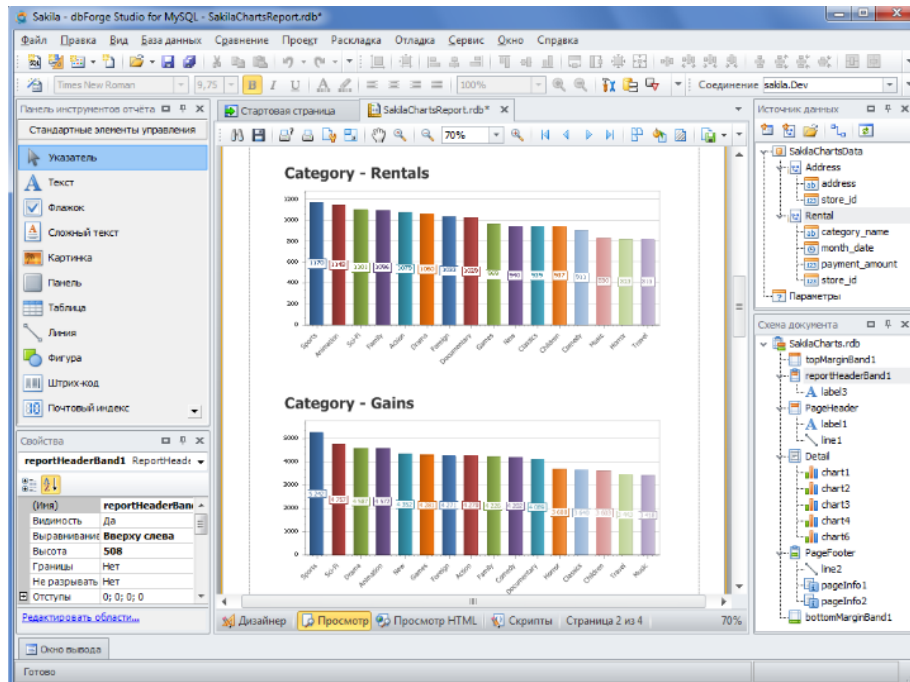
2. Вибрати тип звіту, в наступному вікні – з'єднання, і який тип даних буде використано в звіті, в нашому випадку, створюємо запит.
3. В наступному вікні необхідно вставити SQL-запит, котрий буде виводити дані для звіту.
4. Далі вибираємо стовпці для відображення і, по необхідності, способи їх групування.
5. Наступні вікна пропонують вибрати тип компоновки, стиль, а також надати ім'я створюваному звіту.
6. Далі відкривається вікно редактора дизайну звіту, де можна настроїти вигляд, склад та форматування звіту, а також додати діаграму, графік чи таблицю.



Мал. 2. Майстер діаграм

7. Можна попередньо переглянути звіт і, за необхідності, внести зміни до нього.

Інтерфейс майстра дуже зручний та інтуїтивно зрозумілий. Після невеликої практики, можна досить швидко створювати різні типи звітів та зведених таблиць.



Мал. 3. Приклад створення звіту в графічному вигляді

В процесі створення звітів можна виділити основні переваги перед конкурентними програмами:

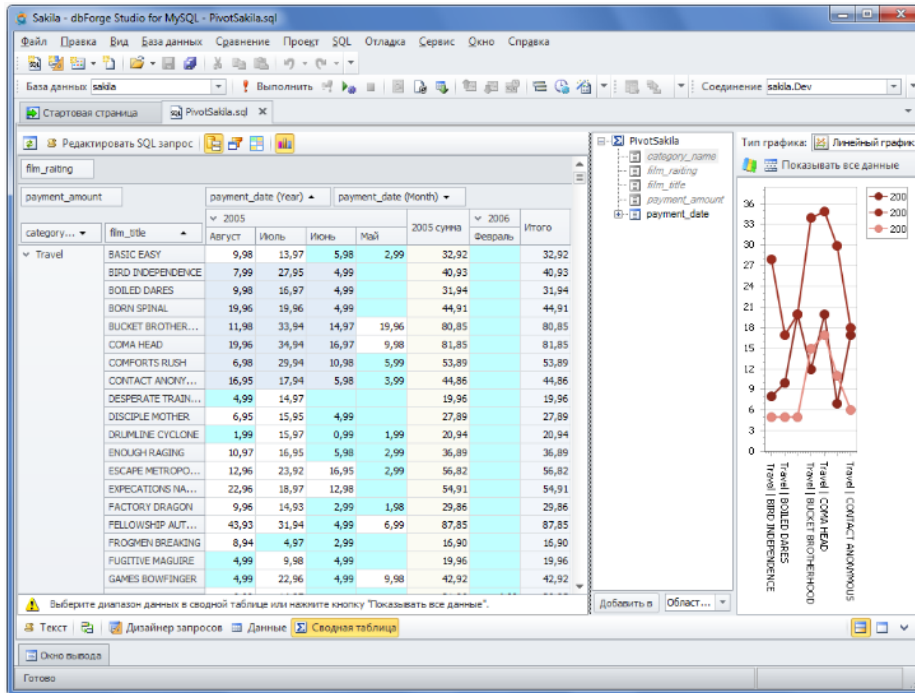
- зручний дизайн для створення акуратних і красивих звітів;
- легке управління даними;
- створення звітів в зручному майстрі;
- як джерело даних можна використовувати запити;
- розширений попередній перегляд перед друком;
- експорт в популярні формати: pdf, html, excel, text, image, і ін.
- розширені можливості по створенню складних звітів: пов'язаних, з мітками, з групуванням даних.

Для проведення аналізу даних, також досить зручним є елемент під назвою «Зведені таблиці». Інструмент для створення зведених таблиць перетворює величезну кількість даних в компактні і інформативні зведення – зведені таблиці. Ви можете перегрупувати (або звести) ваші дані за допомогою єдиного перетягування поки ви не отримаєте найкраще розташування даних для розуміння відносин між ними і залежностей.

При роботі зі зведеними таблицями досить зручними є такі функції програми:

- зручний дизайн, щоб "розкласти по полицях" будь-які незрозумілі дані і представити їх у вигляді компактних і інформативних зведених таблиць;
- широкий вибір стилів для зміни зовнішнього вигляду зведеної таблиці; зручний редактор для додавання умов і налаштування стилів;
- автоматичний підрахунок функцій;
- різноманітні функції зведень для підрахунку користувачьких сум для необхідних стовпців або рядків;
- різні види фільтрації і угруповання для відображення у зведеній таблиці тільки необхідних даних;

DbForge Studio for MySQL надає зручну можливість створювати звіти з великим набором функцій. Створені звіти можна експортувати в більше ніж вісім форматів і відправляти одержувачам за допомогою командного рядка.



Мал. 4. Приклад створення зведеної таблиці

## Література

1. Офіційний веб-сайт: <https://www.devart.com>

УДК 681.3.04

## ПОБУДОВА ДІАГРАМ РОЗМАХУ ЗА ДОПОМОГОЮ STATISTICA

В.С. Фегісов

Побудова графіків, тобто здійснення візуалізації даних є важливим етапом роботи з даними. Багато закономірностей важко виявити безпосередньо за даними, проте вони чітко можуть проявлятися на графіку.

Дуже змістовну і корисну інформацію надає діаграма розмаху, яку ще називають *коробка з вусами*, *скринька з вусами*, *Box Plot*, *Box & Whisker Plot*.

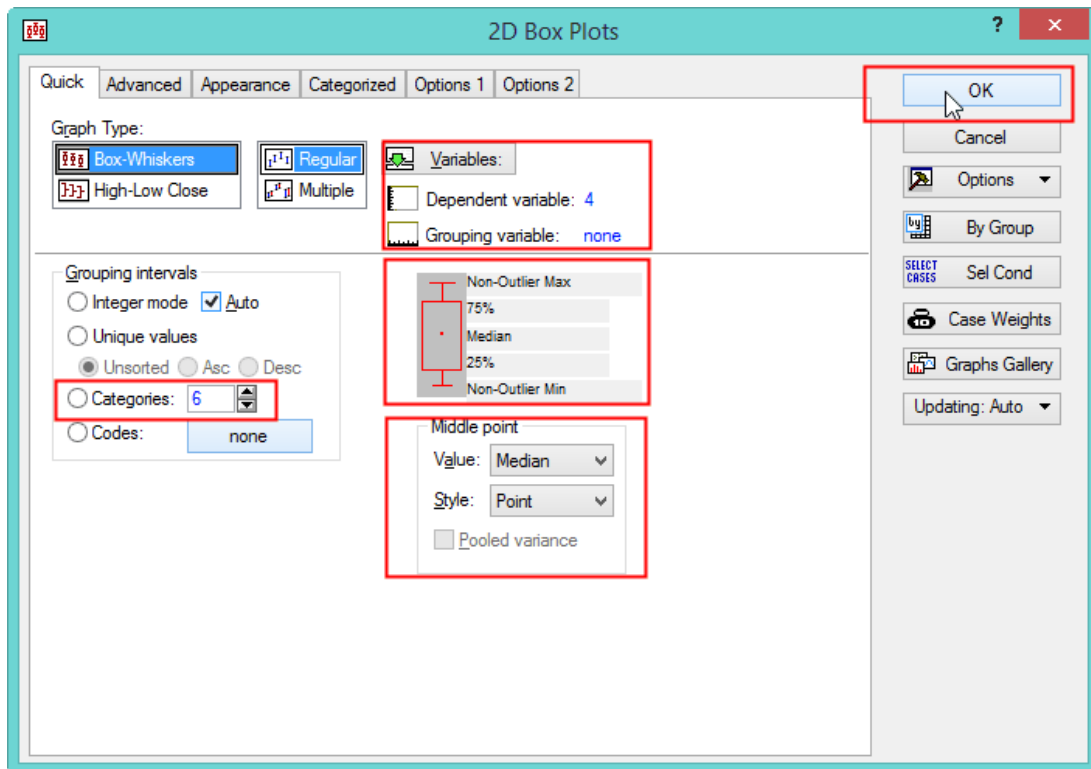
У загальному випадку діаграма розмаху одночасно відображує кілька показників, що характеризують первинні дані: мінімальне та максимальне значення, середню та (або) медіану, перший кватиль (або 25 перцентиль) та третій кватиль (75 перцентиль). Отже такі діаграми не тільки відображують основні характеристики розподілу, але можуть бути використані також і для оцінки розмаху варіації та асиметрії. Основою діаграми є вертикальний або горизонтальний прямокутник, нижній бік якого (або лівий бік, якщо прямокутник розташовано горизонтально) є нижнім кватилем ( $Q_1$ ), а верхній (правий) є верхнім кватилем ( $Q_3$ ). Таким чином висота (або довжина) прямокутника дорівнює міжкватильному інтервалу ( $IQR$ ). Невеличкий квадрат у площі прямокутника відображає середню арифметичну або медіану. Особливістю графіка є наявність "вусів" (Whisker), якими є вертикальні або горизонтальні лінії, довжина яких відповідає вибраному значенню показника розкидання даних (це може бути максимум і

мінімум, стандартне відхилення, дисперсія, кватилі) або точності оцінки генеральних параметрів (стандартна похибка, довірчий інтервал).

Діаграма використовується у багатьох статистичних методах, зокрема для візуалізації описових статистик, оцінки змін у часі або між різними групами, у кореляційному аналізі тощо. Відповідно її побудову можна ініціювати у різних аналізах. Якщо ж будувати графік самостійно, то це здійснюється так:

1. Звернутися до модуля побудови діаграми розмаху, наприклад за командою **Графіка ▶ 2М графіки ▶ Діаграма розмаху... (Graphs ▶ 2D Graphs ▶ Box Plots...)**, що спричинить появу вікна “2М Діаграммы розмаху” (“2D Box Plots”)<sup>1</sup>.

2. У центрі вікна вкладки “Быстрый” (“Quick”) відображається невеличке зображення графіка з показником центру розподілу (середня арифметична (mean) або медіана (median) і тими значеннями показника розкидання даних, що будуть застосовані до “вусів”. У групі “Центральная точка” (Middle point) можна швидко змінити показники центру розподілу: зі списку “Значение” (Value) вибирається показник центру розподілу, а значення зі списку “Стиль” (Style) визначає, яким чином буде відобразитися центр на графіку: у вигляді точки або риски.



Мал. 1

Зверніть увагу, що вибір центру розподілу залежить від того, чи є він нормальним, а це в свою чергу впливає на перелік елементів діаграми.

Таблиця 1

Значення графічних елементів діаграми розмаху

Графічний елемент	Значення графічного елемента залежно від типу розподілу	
	Нормальний	Відмінний від нормального
Вуси	Стандартна похибка / 95 % ДИ	Розмах / Non-Outlier Range

<sup>1</sup> Надалі назви команд, вікон і т.п. подаються англійською та російською мовою відповідно до локалізації інтерфейсу програми.

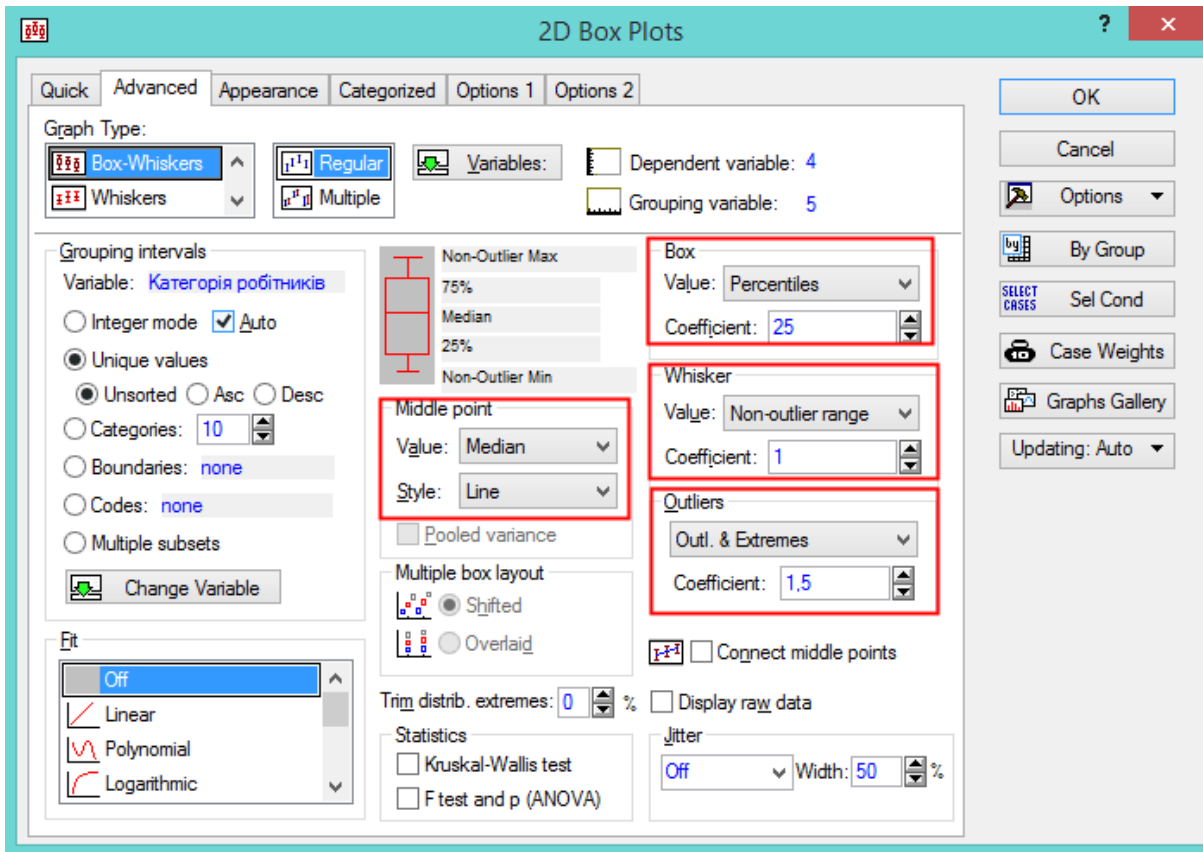
Коробка	Стандартне відхилення	Міжквартильний розмах
Центр	Середня арифметична	Медіана

3. Змінити показники центру розподілу можна також на вкладці “Доповнительно” (“Advanced”). На цій вкладці також знаходяться настройки, за допомогою яких задаються інші елементи діаграми:

- Група “Размах” (Box) призначена для визначення основи прямокутника (“коробки”) діаграми. За замовченням його нижній бік є 1-м квантилем ( $Q1$ ), а верхній є 3-м квантилем ( $Q3$ ), що визначається у списку “Значение” (Value) значенням “Процентили” (Percentiles) і числовим значенням 25 в полі “Коэффициент” (Coefficient).

- Група “Усы” (Whisker) визначає статистичний показник, що буде задіяний на графіку у вигляді вусів.

- Група “Выбросы” (Outliers) дозволяє відображати (або ні) так звані точки-викиди, тобто значення змінної, що суттєво відрізняються у більший або менший бік порівняно з іншими значеннями вибірки. Для відключення відображення викидів у списку “Выбросы” (Outliers) слід вибрати значення “Нет” (Off).

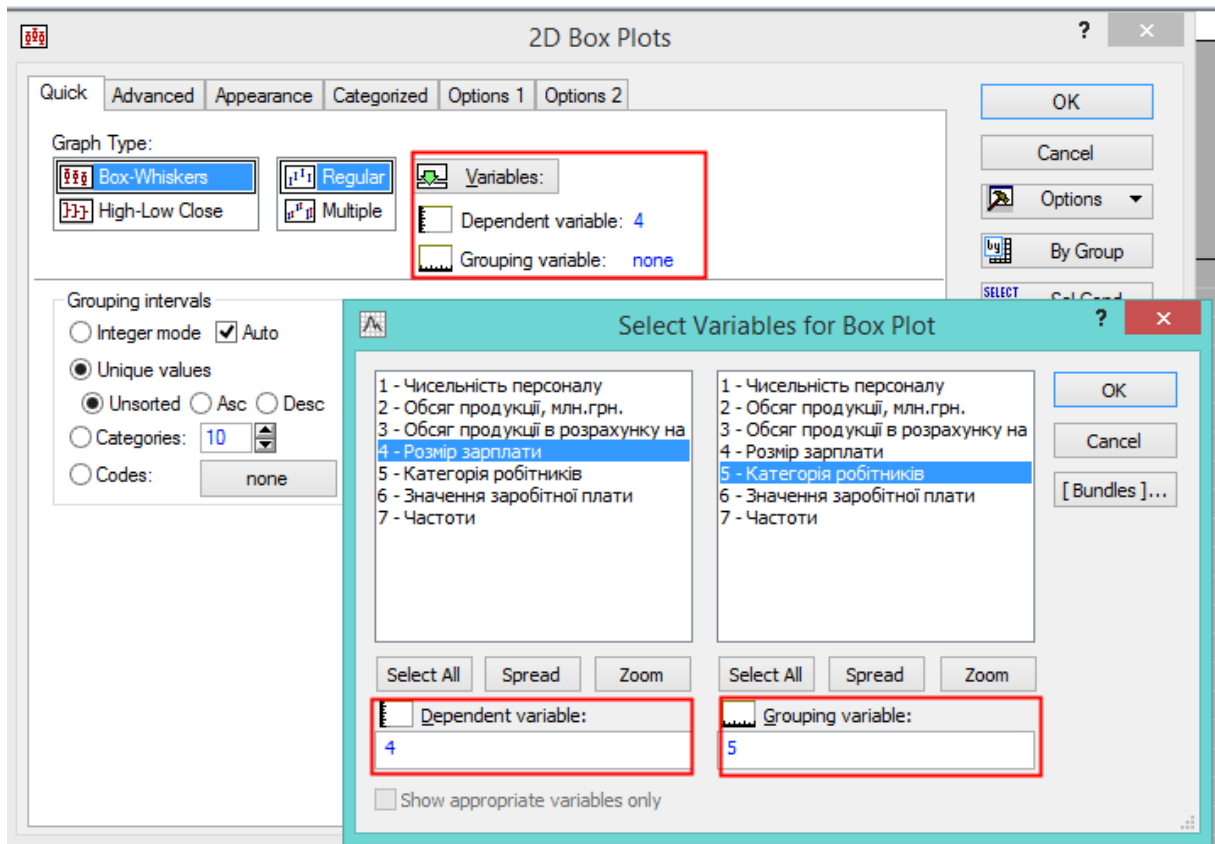


Мал. 2

4. Обов'язковим є визначення змінної, за якою будується графік, для чого слід натиснути кнопку «Переменные» («Variables») і у вікні “Выберите переменные для диаграммы рассеяния” (“Select Variables for Scatterplot”) вибрати потрібну змінну, використовуючи для цього незалежну змінну (“Независимая переменная”, “Depended variable”). Але, як правило, визначаються дві змінні: незалежна і змінна, за якою здійснюється групування (“Группирующая переменная”, Grouping variable). Такий підхід зокрема використовується, коли потрібно об'єднати однотипні значення неперервної змінної за певними категоріями. Наприклад, незалежною змінною може бути заробітна плата співробітників, а змінною, за якою здійснюється групуван-



ня – категорії співробітників: керівники, службовці, робітники.



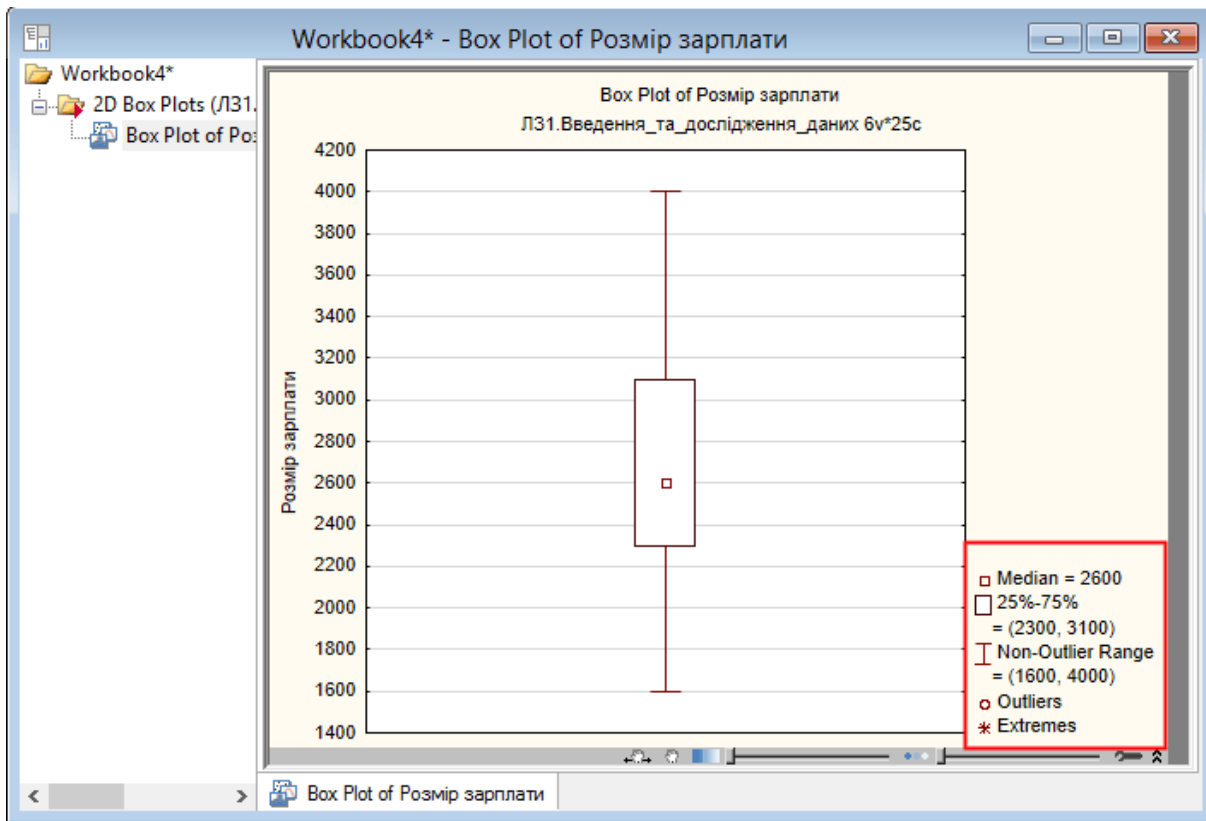
Мал. 3

5. За наявності змінної, за якою здійснюється групування, можна обмежити кількість груп. Для цього на вкладці “Быстрый” (“Quick”) у групі “Интервалы группировки” (Grouping intervals) слід виконати такі дії:

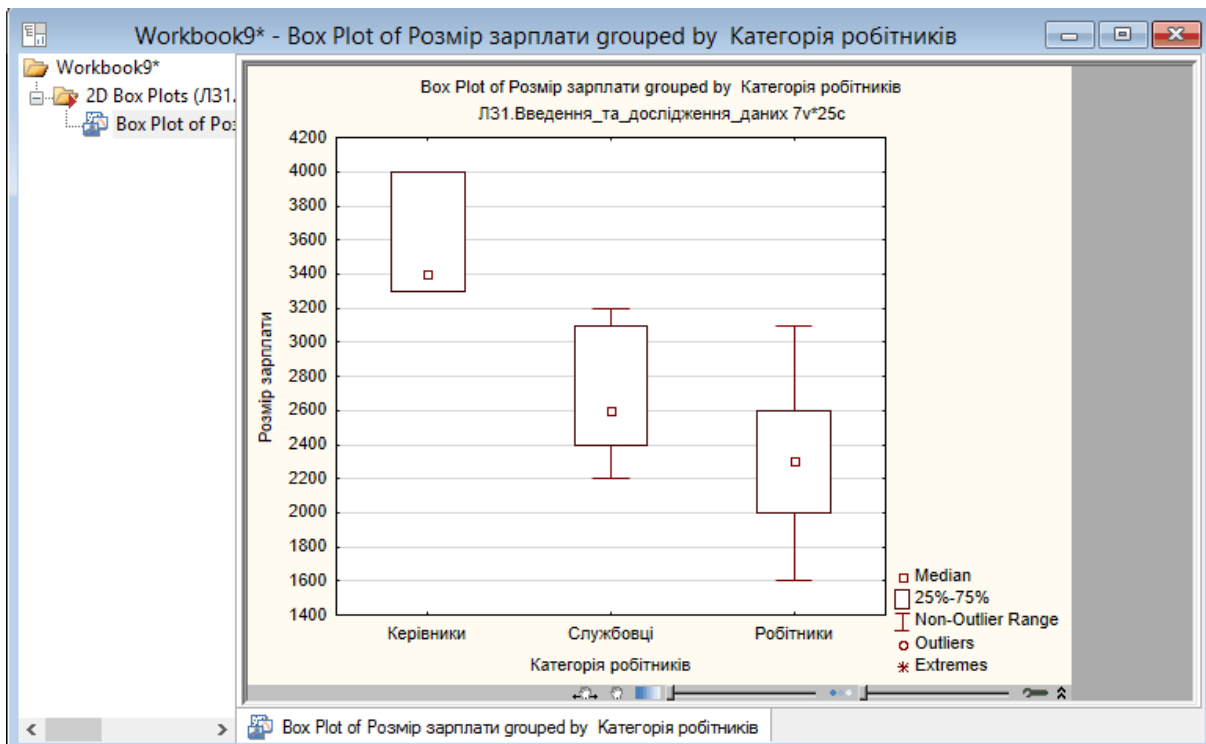
- встановити перемикач “Коды” (Codes);
- клацнути в полі “Нет” (None), після чого з’явиться вікно “Категории кодов” (Category Codes);
- для вибору груп натисніть у ньому кнопку «Zoom», що спричинить появу вікна з переліком груп;

- здійснити вибір потрібних груп, натискаючи на назві;
  - послідовно закрити всі відкриті вікна натисканням кнопки «OK».
6. Натиснути кнопку «OK».

На наступних рисунках наведені приклади побудови діаграми розмаху.



Мал. 4



Мал. 5



УДК 681.3.06

## СИСТЕМИ ДЛЯ АВТОМАТИЧНОГО ФОРМУВАННЯ НАВЧАЛЬНОГО РОЗКЛАДУ

В.С. Фетісов, М.П. Дядечко

При плануванні навчального процесу складання розкладу є найважливішим і трудомісткім завданням. Крім того, що процес формування розкладу є процесом трудомісткім, слід також відмітити, що на основному розкладі базуються такі повсякденні адміністративні операції як зміни в розкладі, облік навчальної роботи і т. ін.

Досить багато існуючих інформаційних систем допомагають створювати розклад у ручному режимі, а ось таких, що дозволяють сформувати розклад в автоматичному режимі створено небагато.

Для автоматичного формування розкладу необхідно виконання низки умов. По-перше, необхідно сформувати нормативно-довідкову інформацію, а саме:

1. класифікатори-довідники з інформацією про перелік спеціальностей, предметів, викладачів та їх навантаження, розпорядок навчального тижня, аббревіатури навчальних груп з прив'язкою до спеціальностей;

2. навчальний план з інформацією про дисципліни, що викладаються, кількість годин на тиждень і семестр, кількість тижнів в семестрі;

3. навчальну сітку занять.

Автоматичне формування розкладу здійснюється за різними алгоритмами. Наприклад, формування розкладу може базуватися на такому понятті як "пріоритет". Згідно пріоритету кожній дисципліні ставиться у відповідність певне число-ранг, яке характеризує ступінь складності дисципліни. Наприклад, "Теорія ймовірності" може мати найвищий ранг, а "Фізичне виховання" – мінімальний. Надалі пріоритет може бути основою, наприклад, для рівномірного щоденного розподілу дисциплін за складністю з метою уникнення ситуацій, коли найскладніші для засвоєння дисципліни не припадали б на один день, а були б рівномірно розподілені між днями навчального тижня в комбінації з менш складними.

Зрозуміло, що алгоритм автоматичного формування розкладу має охоплювати ще багато нюансів навчального процесу, в тому числі і суб'єктивного характеру. Наприклад, потрібно врахувати предмети, що чергуються по верхньому/нижньому тижнях, можливість виключення певних днів та (або) пар для конкретних викладачів і т. ін. Все це і є підставою того, що мало який заклад може похвалитися впровадженням автоматичного формування розкладу у навчальному процесі.

Як було зауважено раніше, автоматичне формування розкладу здійснюється за різними алгоритмами, значна кількість яких становлять інтелектуальну власність розробників програмного забезпечення і є закритими. Тому надалі системи автоматичного формування розкладу розглядаються з точки зору зручності роботи з ними користувачів без порівняння їх алгоритмів роботи.

Серед програмного забезпечення для автоматичного формування розкладу можна виділити інформаційні системи University Scheduler Engine; Vacation Scheduler; Room Scheduler System, стисла характеристика яких наводиться нижче.

University Scheduler Engine (мал. 1,2) – це система, побудована на календарному принципі, що надає можливість розроблення кількох варіантів розкладу на тиждень для університету (або коледжу) [1].

Можливості системи:

- перегляд можливих розкладів;
- пошук курсу;
- вибір курсу;
- перегляд занять курсу.

Зараз ця система використовується, зокрема, у Ренселерівському політехнічному інституті (Rensselaer Polytechnic Institute) [2].

Однією з переваг цієї програми можна вважати те, що вона може бути пристосована до умов і особливостей роботи не лише навчального закладу, а й інших установ. Але надмірна обтяженість інтерфейсу і потреба у виконанні складних «кроків» при плануванні розкладу є значним недоліком цієї системи.

The screenshot shows the RPI Scheduler interface. It features a central grid for scheduling classes from Monday to Saturday. The grid is populated with various course codes and numbers, such as ART S 2963, PSYC 2730, CSCI 2500, and PHYS 1200. To the left of the grid, there are several small thumbnail icons representing different scheduling options. To the right, there is a sidebar with a list of course categories, including 'ART HISTORY', which is currently selected. Below the grid, there are summary statistics for each day of the week, such as '3 classes 7:30 total' for Monday. At the bottom right, there are navigation buttons labeled '< Previous' and 'Next >'. A message at the bottom of the window states: 'The Scheduler generated a lot of schedules for you. You may want to narrow down this list by blocking out times and sections on the previous page.'

Мал. 1

The screenshot shows the RPI Course Preview interface. It features a central grid for scheduling classes from Monday to Saturday. The grid is populated with blue blocks representing class sections. To the left of the grid, there are several small thumbnail icons representing different scheduling options. To the right, there is a sidebar with detailed information for the selected course, 'CALCULUS II Section 6 (30074)'. This information includes the class time (4:10 per week), the number of seats (30), and the class times for lectures and recitations, along with the professors' names. Below the grid, there are summary statistics for each day of the week, such as '3 classes 7:30 total' for Monday. At the bottom right, there are navigation buttons labeled '< Previous' and 'Next >'. A message at the bottom of the window states: 'The Scheduler generated a lot of schedules for you. You may want to narrow down this list by blocking out times and sections on the previous page.'

Мал. 2

Vacation Scheduler (мал. 3, 4) також належить до систем, побудованих за календарним принципом. Однак на відміну від University Scheduler Engine, ця система базується на принципі єдиного вікна, де всі елементи, що потрібні при створенні розкладу, зібрані в одному місці, і це робить використання програми більш зручним порівняно з попередньою системою. До недоліків Vacation Scheduler належить обмеженість і орієнтованість в основному на серверну роботу. Також ця система може бути використана для планування відпусток [3]. Це передбачено наступними можливостями:

- перегляд календаря для планування часу відпустки;
- створення форми для запиту на відпустку;
- відображення на домашній сторінці робітника отриманого часу відпустки і вже витраченого.

**Time Off Information For John Doe**

Home | Calendar | My Account | Administration | Logout

To request a vacation or other time off type:

1. Add the hours requested on the correct day of the week.
2. Select the time off type from the drop down that corresponds with the day of the week.
3. Click on the Add Time Off button to submit your request.
4. The request will be emailed to your supervisor to be approved.

(The time off must be approved before you can use it.)

5. If there are errors, they will be displayed after clicking the Add Time Off button. You must correct all errors before any submission will be complete.
6. After your request is complete, click on a tab at the top of the page to navigate the site or click the browser.

Note: At the bottom of the page you should see a summary of all your time off types that you are eligible to use.

Name: John Doe

Daily Hours	Type
Sunday-09/04/05	Select Type
Monday-09/05/05	Select Type
Tuesday-09/06/05	Select Type
Wednesday-09/07/05	Select Type
Thursday-09/08/05	Select Type
Friday-09/09/05	Select Type
Saturday-09/10/05	Select Type

Request Time Off

Request Type: Vacation Paid

Request Type: Personal Day Paid

Request Type: Memorial Day

Request Type: July 4th

Request Type: Labor Day

Request Type: New Years Day

**SUMMARY INFORMATION**

Description	Already Scheduled Time			Total Unused	Total time Left to Schedule
	Scheduled	Used	Remaining		
Vacation Paid	0	0	0	180	180
Personal Day Paid	0	0	0		
Memorial Day	0	0	0		
July 4th	0	0	0		
Labor Day	0	0	0		
New Years Day	0	0	0		

Мал. 3

**Vacation Calendar For John Doe**

Home | Calendar | My Account | Administration | Logout

To request a vacation:

1. For a complete week click on the Weekly button on any Sunday.
2. For a single day click on the button for that day.

Note: Some days may be unavailable. Each manager has configured the calendar to their specific needs. If there are no buttons to select a day, it is probably because the manager has configured it to do so.

2004 | < | **Sep 2005** | > | 2006

S	M	T	W	T	F	S
29	30	31	01	02	03	
04	Week	05	06	07	08	09
11	Week	12	13	14	15	16
18	Week	19	20	21	22	23
25	Week	26	27	28	29	30

Мал. 4

Room Scheduler System - це безкоштовний додаток з відкритим програмним кодом, який надає простий засіб планування занять, відео конференцій або зустрічей. Все це здійснюється з використанням технології Інтернет [4]. В основі системи Room Scheduler System (мал. 5) лежить принцип єдиного вікна, так само як і в Vacation Scheduler, але її головною відмінністю і перевагою є надання можливості виконувати планування розкладу з використання компромісів у правах на аудиторію. Тому планування розкладу відбувається за допомогою «тікетної» процедури, коли викладачу потрібно подати заявку на використання певної аудиторії в часовій сітці конкретного дня. У такому разі можуть виникати деякі незручності для викладачів та студентів, що варто відзначити як недолік даної системи. Також недоліком є те, що хоча система є багатомовною, але кількість підтримуваних мов зовсім невелика: англійська, португальська та німецька мови. Досить цікаво, що розробники надають можливість спробувати демо-версію продукту навіть не встановлюючи її на свій комп'ютер, а просто перейшовши за посиланням і далі можна працювати з системою у вікні браузера [5].



Мал. 5

## Література

1. University Scheduler Engine [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://universitiescheduler.com>
2. RPI Scheduler 2011 [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://rpischeduler.com/>
3. Vacation Scheduler [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://vacation-sched.sourceforge.net/>
4. Meeting Room Scheduler System [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://rss.sourceforge.net/>
5. Meeting Room Scheduler System Demo Environment [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://mrss.ighor.com>

# 4

## Методика

УДК 517

### ОДНОРІДНІ РІВНЯННЯ: ВІД АЛГЕБРАЇЧНИХ ДО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ

Н.А. Барило

Основний зміст шкільного курсу математики складається з декількох математичних ліній, які з класу в клас отримують розвиток, поглиблюються та конкретизуються, серед них «лінійні рівняння, нерівностей, систем рівнянь», «ядерним» поняттям якої є поняття рівняння, що є одним із найголовніших математичних понять. В більшості практичних і наукових задач, де деяку величину не можна безпосередньо виміряти або обчислити по вже відомій формулі, вдається скласти співвідношення ( або декілька співвідношень), яке воно задовольняє. Так отримують рівняння (або систему рівнянь) для визначення невідомої величини.

Розглянемо таку систему завдань: розв'язати рівняння (або систему рівнянь).

#### I. Алгебраїчні рівняння та системи рівнянь

1.1.  $(2x - 1)^2 + (2x - 1)(x + 2) - 2(x + 2)^2 = 0;$

1.2.2  $\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^2 + 3\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^2 - 5\frac{x^2-9}{x^2-1} = 0;$

1.3.  $\sqrt[3]{(5+x)^2} + 4\sqrt[3]{(5-x)^2} = 5\sqrt[3]{25-x^2};$

1.4.  $\sqrt[3]{(x-1)^2} - 3\sqrt[3]{(x+1)^2} = 2\sqrt[3]{x-1};$

1.5. 
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2 \end{cases};$$

1.6. 
$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 3 \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6 \end{cases};$$

#### II. Трансцендентні рівняння

2.1.  $9^x + 6^x = 2^{2x+1};$

2.2.  $3^{2x+4} + 45 \cdot 6^x - 9 \cdot 2^{2x+2} = 0;$

2.3.  $5^{\lg x} - 3^{\lg x} = 5, (3) \cdot 3^{\lg \sqrt{x}} \cdot 5^{\frac{1}{2}(\lg x - 2)};$

2.4.  $4\sin^2 \frac{x}{2} - \sin x - 1 = 0;$

2.5.  $\sin^2 x - 8 \sin x \cos x - 15 \cos^2 x = 0;$

2.6.  $6\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x = 2;$

#### III. Диференціальні рівняння

3.1.  $y' = \frac{x+y}{x-y};$

3.2.  $y' = \frac{x^2+y^2}{2x^2}.$

Запропоновані завдання із різних розділів математики, які відрізняються зовнішньою фабрикою, але незаперечно схожі. А в чому ж їх схожість? Суттєва ознака даних рівнянь (систем) скрита в логічній структурі умови.

Проаналізувавши всі завдання, помічаємо, що ліві частини рівнянь – однорідні многочлени від двох змінних або від двох виглядів змінних.

Наприклад, в рівнянні 1.1. прийнявши вирази:  $2x - 1 = u; x + 2 = v$ , ліва частина рівняння  $P(u; v) = u^2 + uv - 2v^2$  – однорідний многочлен другого степеня, оскільки сума показників степенів усіх його членів дорівнюють 2; права частина – 0;

в рівнянні 2.1. прийнявши вирази:  $3^x = u; 2^x = v$ , ліва частина рівняння

$Q(u; v) = u^2 + uv - 2v^2$  – однорідний многочлен другого степеня, права частина – 0;

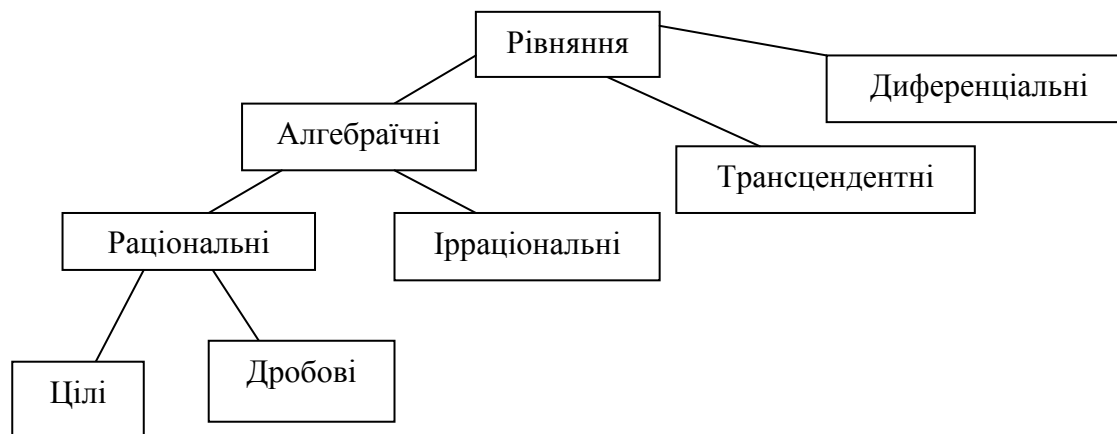
в рівнянні 2.5. прийнявши вирази:  $\sin x = u$ ;  $\cos x = v$ , ліва частина рівняння

$F(u; v) = u^2 - 8uv - 15v^2$  – однорідний многочлен другого степеня, права частина – 0.

Тому, рівняння всіх трьох груп – однорідні другого степеня, або їх можна звести до однорідних.

В шкільному курсі математики прийнята така класифікація рівнянь (в основу класифікації покладено вид виразу, див. таблицю 1).

Таблиця 1



В чому ж полягає процес відшукування розв'язків того чи іншого рівняння? Утому, що початкове рівняння замінюють іншим (системою, сукупністю інших), як правило, простішим; одержане рівняння чи систему, або сукупність, знову замінюють простішими. Цю «маніпуляцію» повторюють доти, поки не одержать рівняння (систему, сукупність рівнянь) розв'язки якого очевидні. Але щоб зробити висновок, що одержані розв'язки останнього рівняння (системи, сукупності рівнянь) складають множину розв'язків заданого, усі заміни слід було здійснювати так, щоб замість попереднього рівняння (системи, сукупності) розглядати йому рівносильне. Якщо ж це зробити не можливо, слід принаймні бачити, де, на якому кроці ця рівносильність порушується, усвідомлювати за рахунок чого вона порушується, щоб можна було, виходячи із розв'язків остаточного рівняння (системи, сукупності), записати множину розв'язків вихідного, тобто відкинути сторонні чи віднайти втрачені розв'язки. Очевидно, треба знати які перетворення треба робити над рівнянням, щоб одержувати рівняння рівносильне даному (теореми про рівносильні перетворення).

**Означення 1.** Многочлен від змінних  $x_1, x_2, \dots, x_n$  називається *однорідним* степеня  $m$ , якщо суми показників степенів усіх його членів дорівнюють  $m$ .

Наприклад,

$P(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$  – однорідний многочлен третього степеня,

$Q(x, y) = x^2 + 3y^2 - 5xy$  – однорідний многочлен другого степеня

$F(u; v) = 2u^2 + 3v^2 - 5u^2$ , де  $\frac{x-3}{x+1} = u$ ;  $\frac{x+3}{x-1} = v$  – однорідний многочлен другого степеня

від двох виглядів змінних (див. рівняння 1.2.)

Якщо  $ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$  – одночлен степеня  $m$  ( $k_1 + k_2 + \dots + k_n = m$ ), то для будь-якого  $t$  маємо:

$$a(tx_1)^{k_1} (tx_2)^{k_2} \dots (tx_n)^{k_n} = at^{k_1+k_2+\dots+k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} = t^m ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}.$$

Звідси випливає, що многочлен  $P(x_1; x_2; \dots; x_n)$  є однорідним степеня  $m$  тоді і тільки тоді, коли для будь-якого  $t$  виконується рівність:

$$P(tx_1; tx_2; \dots; tx_n) = t^m P(x_1; x_2; \dots; x_n).$$

Для запропонованої добірки завдань досить розглянути однорідні многочлени від двох змінних.

**Означення 2.** Рівняння виду  $P(x; y) = 0$ , де  $P(x; y)$  - однорідний многочлен від змінних  $x$  та  $y$ , називається однорідним.

Тому рівняння: 1.1; 1.2; 2.2; 2.5; 3.1; 3.2 вказаної вище системи завдань – однорідні за означенням 2; рівняння: 1.3; 1.4; 2.1; 2.3; 2.6 є такими, що зводяться до однорідних.

Загальний спосіб розв'язування всіх однорідних рівнянь впливає із теореми 1.

**Теорема 1.** Якщо  $P(x; y)$  – однорідний многочлен степеня  $m$  від змінних  $x$  та  $y$ , то існує многочлен  $Q(t)$  такий, що  $P(x; y) = x^m Q(t)$ , де  $t = \frac{x}{y}$ .

**Доведення.** Підставимо в многочлен  $P(x; y)$  замість  $y$  вираз  $tx$ , одержимо:

$$P(x; y) = P(x; tx) = x^m P(1; t),$$

де  $P(1; t)$  - многочлен від  $t$ . Позначимо його через  $Q(t)$  і одержимо необхідну рівність.

Звідси, метод розв'язання однорідних рівнянь, від алгебраїчних до диференціальних – метод підстановки, а саме  $t = \frac{x}{y}$  (можна також, в залежності від зручності, використати підстановку  $t = \frac{y}{x}$ ).

Продемонструємо універсальність методу на прикладах запропонованої системи:

$$1.1. (2x - 1)^2 + (2x - 1)(x + 2) - 2(x + 2)^2 = 0.$$

Нехай  $2x - 1 = u$ ,  $x + 2 = v$ , тоді рівняння набуде вигляду:

$$u^2 + uv - 2v^2 = 0.$$

Оскільки  $u$  і  $v$  не можуть одночасно дорівнювати нулю, то виконаємо підстановку  $t = \frac{u}{v}$ . Дістанемо квадратне рівняння

$$t^2 + t - 2 = 0,$$

що має корені:  $t_1 = -2; t_2 = 1$ , звідки  $u = -2v$  або  $u = v$ .

Тоді  $2x - 1 = -2(x + 2)$  або  $2x - 1 = x + 2$ , звідки  $x = -0,75$  або  $x = 3$ .

Відповідь:  $\{-0,75; 3\}$ .

$$1.3. \sqrt[3]{(5+x)^2} + 4\sqrt[3]{(5-x)^2} = 5\sqrt[3]{25-x^2}.$$

$$\sqrt[3]{(5+x)^2} + 4\sqrt[3]{(5-x)^2} - 5\sqrt[3]{(5-x)(5+x)} = 0$$

(1)

Прийнявши  $\sqrt[3]{5+x} = u$ ,  $\sqrt[3]{5-x} = v$ . Тоді (1) зводиться до розв'язання рівняння:

$$u^2 - 5uv + 4v^2 = 0.$$

Виконаємо заміну  $t = \frac{u}{v}$  ( $v \neq 0$ ), одержимо:

$$t^2 - 5t + 4 = 0,$$

звідки  $t_1 = 1$  і  $t_2 = 4$ .

Отже  $u = v$  або  $u = 4v$ . Повернувшись до заміни, одержимо:

$$\sqrt[3]{5+x} = \sqrt[3]{5-x} \text{ або } \sqrt[3]{5+x} = 4\sqrt[3]{5-x},$$

звідки  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \frac{63}{13}$ .

Відповідь:  $\{0; \frac{63}{13}\}$ .

$$1.5. \begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2. \end{cases}$$

Виконаємо алгебраїчне додавання рівнянь системи

$$\begin{array}{r} x^3 + y^3 = 1 \quad | \cdot 2 \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2 \quad | \cdot (-1) \\ \hline 2x^3 - x^2y - 2xy^2 + y^3 = 0 \end{array}$$

Отримаємо систему рівносильну даній:

$$\begin{cases} 2x^3 - x^2y - 2xy^2 + y^3 = 0 \\ x^3 + y^3 = 1, \end{cases} \quad (1)$$

Розв'язавши перше рівняння системи (1) методом розкладання на множники, (1) рівносильна сукупності систем:

$$\begin{cases} 2x - y = 0, \\ x^3 + y^3 = 1; \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x - y = 0, \\ x^3 + y^3 = 1; \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x + y = 0, \\ x^3 + y^3 = 1. \end{cases}$$

Застосувавши метод підстановки до кожної із отриманих систем, одержимо розв'язки:  $\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{3}; \frac{2\sqrt[3]{3}}{3}\right), \left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2}; \frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)$ .

$$2.1. \quad 9^x + 6^x = 2^{2x+1}; \quad 3^{2x} + 2^x 3^x - 2 \cdot 2^{2x} = 0.$$

Виконавши заміну  $3^x = u, 2^x = v$  одержимо рівняння:  $u^2 + uv - 2v^2 = 0$ . Оскільки  $u > 0, v > 0$ , то  $t = \frac{u}{v} > 0$ . Тому,  $t^2 + t - 2 = 0$ , звідки  $t_1 = -2 < 0; t_2 = 1$ .

$$\text{Отже, } \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1, \text{ звідки } x = 0.$$

Рівняння 2.5; 2.6 – тригонометричні.

Здебільшого пошук плану, способу розв'язування того чи іншого тригонометричного рівняння доцільно провести за схемою:

1. Зводимо всі тригонометричні функції до одного аргументу.
2. Якщо вдалося це виконати, то пробуємо всі тригонометричні вирази привести до однієї функції.
3. Якщо ж до одного аргументу вдалося привести, а до однієї функції ні, то пробуємо привести рівняння до однорідного рівняння (\*)

Рівняння виду

$$a_0 \cos^n x + a_1 \cos^{n-1} x \sin x + \dots + a_{n-1} \cos x \sin^{n-1} x + a_n \sin^n x = 0 (*)$$

однорідне тригонометричне  $n$ -го степеня відносно змінних  $\sin x$  і  $\cos x$  (сума показників у всіх доданків однакова –  $n$ ).

Приєм розв'язання: діленням обох частин рівняння (\*) на  $\cos^n x$ . Проте, попередньо слід довести, що  $\cos x \neq 0$  (методом від супротивного). Дійсно, припустимо  $\cos x = 0$ . Тоді, підставляючи у дане рівняння  $\cos x = 0$ , дістанемо  $a \sin^n x = 0$ , звідки  $\sin x = 0$ , що суперечить властивостям синуса і косинуса одного і того самого аргументу ( $\sin^2 x + \cos^2 x = 1; 0 + 0 \neq 1$ ). Поділивши на  $\cos^n x \neq 0$  обидві частини даного рівняння, дістанемо алгебраїчне рівняння відносно функції  $tgx$

$$a_1 tg^n x + a_2 tg^{n-1} x + \dots + a_{n-1} tgx + a_n = 0.$$

При потребі зведення тригонометричного рівняння до однорідного (рівняння 2.6) часто використовують формули тригонометричних функцій подвійного кута та тригонометричну одиницю.

Рівняння 2.5 – однорідне тригонометричне рівняння другого степеня, рівняння 2.6 є таким, що зводиться до однорідного з допомогою перетворення

$$2 = 2(\sin^2 x + \cos^2 x).$$

$$2.6. \quad 6\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x = 2;$$

$$6\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x - 2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0;$$

$$4\sin^2 x - \sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$$

Поділивши ліву і праву частини отриманого рівняння на  $\cos^2 x (\cos^2 x \neq 0)$ , одержимо квадратне рівняння відносно  $tgx$

$$4 tg^2 x - tgx - 3 = 0$$

звідки

$$tgx = 1 \text{ або } tgx = -\frac{3}{4}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$x_2 = \arctg\left(-\frac{3}{4}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$



Рівняння 3.1; 3.2 – однорідні диференціальні рівняння.

Рівняння вигляду

$$y' = f(x, y), \text{ де } f(tx, ty) = f(x, y), \text{ при } t \neq 0 \quad (1)$$

або

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (1^*)$$

називається однорідним диференціальним рівнянням, де  $P(tx, ty) = t^k P(x, y)$ ,  $Q(tx, ty) = t^k Q(x, y)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , тобто функції  $P$  і  $Q$  є **однорідними** одного й того самого порядку.

Наприклад,

1) функція  $f(x, y) = x^2 - 5xy$  – однорідна функція 2-го порядку, оскільки

$$f(tx, ty) = tx^2 - 5(tx)(ty) = t^2(x^2 - 5xy) = t^2 f(x, y);$$

2)  $f(x, y) = \frac{2x-y}{\sqrt{xy}}$  – однорідна функція 0-го порядку, оскільки

$$f(x, y) = \frac{2(tx) - (ty)}{\sqrt{(tx)(ty)}} = \frac{t(2x - y)}{t\sqrt{xy}} = \frac{2x - y}{\sqrt{xy}} = t^0 f(x, y).$$

Зауважимо, що рівняння (1) і (1\*) можна писати так:

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \text{ якщо } x \neq 0.$$

Це рівняння можна звести до диференціального рівняння з відокремленими змінними

за допомогою підстановки  $\frac{y}{x} = u$ , тобто  $y = ux$ , де  $u$  – нова невідома функція.

$$3.1. y' = \frac{x+y}{x-y}$$

Рівняння є однорідним, тому, що

$$f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}, \text{ а } f(tx, ty) = \frac{tx+ty}{tx-ty} = \frac{t(x+y)}{t(x-y)} = \frac{x+y}{x-y} = f(x, y) \text{ при } t \neq 0.$$

Розв'яжемо це рівняння за допомогою підстановки  $y = ux$ . Тоді  $y' = u + xu'$  і задане рівняння набуває вигляду

$$\begin{aligned} u + xu' &= \frac{x + xu}{x - xu} \Leftrightarrow u + xu' = \frac{1 + u}{1 - u} \Leftrightarrow xu' = \frac{1 + u}{1 - u} - u = \\ &= \frac{1 + u - u + u^2}{1 - u} = \frac{1 + u^2}{1 - u} \Leftrightarrow \frac{xdx}{x} = \frac{1 + u^2}{1 - u} du \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1 - u}{1 + u^2} du = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \frac{1}{1 + u^2} - \frac{u}{1 + u^2} du = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \arctgu - \frac{1}{2} \ln(1 + u^2) = \ln x - \ln C \Leftrightarrow 1 + u^2 = \frac{C^2 e^{2\arctgu}}{x^2}, u = \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Отже,  $x^2 + y^2 = \frac{C^2 e^{2\arctgu}}{x^2}$  – загальний інтеграл заданого диференціального рівняння.

### Література

1. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: Учеб. Пособие для студентов физ. – мат. спец. пед. ин-тов / Е. И. Лященко, К. В. Зобкова, Т. Ф. Кириченко и др.; Под ред. Е. И. Лященко. – М.: Просвещение, 1988. – 223 с.: ил.
2. Нелін Є. П., Долгова О. Є. Алгебра і початки аналізу. Дворівневий підручник для 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів. – 5-те вид. – Х.: Гімназія, 2009. – 416 с.
3. Програми з математики для 5-11 кл. загальноосвітньої школи / М-во освіти України. – К., 1992. – 89 с.
4. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512с.; іл.

УДК 372.851:372.853

## ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ КОМПЕТЕНЦІЙ В УМОВАХ ІНТЕГРОВАНОГО НАВЧАННЯ

Л.М. Бойко

Необхідною складовою загальної підготовки учня до життя є належний рівень фізико-математичної освіти. Математика є мовою фізики, фізика використовує ідеї та методи математики для дослідження явищ та процесів. Шкільний курс математики має озброювати учнів кількісними методами та прийомами аналізу явищ, що вивчаються в курсах суміжних дисциплін взагалі і фізики зокрема. Очевидно, вивчення фізики в школі теж повинно стимулювати потребу в учнів до оволодіння математикою. Сьогодні скоріше за все необхідно говорити не просто про міжпредметні зв'язки, і що з математики використати у фізиці і навпаки, а про інтегрованість у вивченні фізики і математики.

В сучасну українську систему освіти впроваджується компетентнісний підхід, який висуває на перший план вміння розв'язувати проблеми, що виникають у різних ситуаціях: у пізнанні, дослідженні реальності, опануванні сучасними технологіями, у людських стосунках, у виборі професії та готовності до навчання тощо. Новий підхід до навчання повинен забезпечити учню надбання різностороннього досвіду діяльності та націлити його на оцінку своєї діяльності та її результатів, рефлексію своїх можливостей, усвідомлення меж своєї компетентності й некомпетентності.

Над проблемою упровадження компетентнісного підходу в математичну освіту працювали С. А. Раков, І. М. Аллагулова, Л. І., О.В. Шавальова та ін. Зокрема С. А. Раков визначає математичну компетентність як уміння бачити та застосовувати математику в реальному житті, розуміти зміст і метод математичного моделювання, вміння будувати математичну модель, досліджувати її методами математики, інтерпретувати отримані результати, оцінювати похибки обчислень [1]. Суттєвим є той факт, що компетенції особистості формуються і проявляються в діяльності, тому компетентнісний підхід дає змогу реалізувати діяльнісний характер освіти.

Розширення міжпредметного компонента у структурі загальноосвітніх дисциплін називають першочерговим кроком на шляху до побудови компетентнісної моделі освіти [1].

Як зазначає В.В. Серіков [2], будівельним матеріалом особистісних властивостей і об'єктом переживання учня повинен бути як простір науки, яку він вивчає, її логіка, краса, так і її вихід в інші сфери знання, практики, цінностей та змісту. Реалізація на уроках математики міжпредметних зв'язків дає можливість учню увійти в сферу реальності, де неминучим є зіткнення з іншими галузями знання.

В основі компетентнісного підходу лежать два основних поняття: «компетенція» і «компетентність», які в найбільш загальному розумінні означають: компетенція – питання, в яких людина добре обізнана, володіє пізнанням та досвідом; компетентність – володіння відповідними знаннями і здібностями, які дають людині змогу ґрунтовно судити про певну сферу й ефективно в ній діяти.

Математична компетентність – це вміння бачити й застосовувати математику в повсякденному житті, розуміти її зміст, суть методу математичного моделювання, будувати і досліджувати математичні моделі процесів і явищ, що відбуваються навколо. Саме реалізація міжпредметних зв'язків математики з іншими шкільними предметами сприяє оволодінню учнями системою знань та їхнього застосування, розвиток в учнів уміння переносу набутих знань в нові навчальні та життєві ситуації.

Проблема міжпредметних зв'язків у шкільній освіті не нова і розглядається в педагогіці і методиках як важлива дидактична умова і засіб глибокого засвоєння основ наук. Так, методисти-фізики, зокрема Ю.І. Дік відмічає, що встановлення міжпредметних зв'язків у шкільному курсі фізики сприяє більш глибокому засвоєнню знань, формуванню наукових понять і законів, вдосконаленню навчально-виховного процесу тощо[3].

В пояснювальній записці до програми з математики зазначається, що одним з основних завдань математики є забезпечення свідомого і міцного оволодіння системою математичних

знань, навичок і умінь, достатніх для вивчення інших дисциплін та продовження освіти, формування уявлень про ідеї і методи математики та її роль у пізнанні навколишнього світу, формування навичок математизації ситуацій під час дослідження явищ природи та суспільства.

Міжпредметний характер задачі дозволяє регулювати рівень її складності за рахунок складності її фізичного змісту та типу зв'язку за часом, наявності або відсутності математичної моделі фізичного явища, що фігурує в умові задачі, а також за рахунок формулювання завдання, уведення до його змісту різної складності перетворень та обчислень тощо. Зокрема задачі з міжпредметним змістом дозволяють розглянути реальні ситуації та оцінити можливі наслідки перебігу певних процесів, прогнозувати процеси, інтерпретувати розв'язки задач.

Неспроможність учнів застосувати математичні знання в процесі вивчення суміжної дисципліни говорить про відсутність вміння та навичок практичного застосування знань у частково змінених та нових умовах, а отже і надалі, в побуті та трудовій діяльності учні та випускники відчуватимуть труднощі в процесі розв'язування задач, які вимагатимуть застосування математичних знань, не розумітимуть потреби у вивченні математики. Разом з тим успішне засвоєння учнями курсу фізики, та інших суміжних дисциплін неможливе без вміння застосовувати математичний апарат.

Для подолання таких труднощів, підвищення мотивації вивчення математики доцільно розробити систему завдань на застосування знань у змінених ситуаціях. При цьому слід поступово змінювати умови, дотримуючись, наприклад, такої схеми:

1. Актуалізувати певне знання (формула, теорема, властивість) або запропонувати просту задачу на безпосереднє застосування цього знання.
2. Запропонувати завдання на застосування цього знання в аналогічній ситуації.
3. Запропонувати завдання на застосування цього ж знання у частково зміненій ситуації.
4. Запропонувати завдання на застосування цього ж знання у повністю незнайомій ситуації.

Усі чотири етапи доцільно проходити в процесі вивчення або повторення певних знань. З метою розвитку учнів та систематизації знань, на контрольних роботах також доцільно пропонувати учням завдання на застосування знань у частково та повністю змінених ситуаціях. При цьому окремим учням можна запропонувати різні види допомоги.

Для зміни умов застосування знань природно використати задачі з фабулою міжпредметного змісту. Чинна програма шкільного курсу фізики дозволяє використати цей предмет в якості джерела задач з практичним змістом зі зрозумілими учням поняттями та термінами [1].

Міжпредметний характер задачі дозволяє регулювати рівень її складності за рахунок складності її фізичного змісту та типу зв'язку за часом, наявності або відсутності математичної моделі фізичного явища, що фігурує в умові задачі, а також за рахунок формулювання завдання, уведення до його змісту різної складності перетворень та обчислень тощо. Зокрема задачі з міжпредметним змістом дозволяють розглянути реальні ситуації та оцінити можливі наслідки перебігу певних процесів, прогнозувати процеси, інтерпретувати розв'язки задач.

Наведемо приклади таких завдань.

*Завдання 1.* Розв'язавши рівняння, визначте швидкість руху автомобіля містом (у кілометрах за годину). Згідно із правилами дорожнього руху, дозволена в населених пунктах максимальна швидкість становить 60 км/год.

- 1)  $700 + 2v = 3500$ ;
- 1)  $200 - 3v = 65$ ;
- 2)  $190 = 2v + 70$ ;
- 3)  $\frac{v}{2} + 235 = 290$ .

Кожне рівняння у цьому завданні описує рух, який дійсно можна спостерігати. Усі ці рівняння складені на основі рівняння рівномірного руху  $s = s_0 + vt$ , розв'язуються відповідно до Проте в умові задачі ця формула не наводиться, оскільки у 7 класі в такому вигляді формула шляху ще не траплялася учням. Важливим моментом з погляду формування життєвих компетенцій учня є звернення його уваги на одержаний результат та його інтерпретація. Так відповіді до рівнянь (2)  $v = 45$  км/год і (3)  $v = 60$  км/год є цілком природними для руху автомобіля міськими дорогами, натомість розв'язок рівняння (1)  $v = 1400$  км/год є близьким до значення швидкості звуку і

більше підходить для руху літаків, ніж міського транспорту, розв'язок рівняння (4)  $v = 110$  км/год теж дає значення швидкості, неприпустимої для руху містом.

У зв'язку із розв'язанням цієї та подібних задач на визначення швидкості руху автомобілів на дорогах доцільно поговорити про дотримання учнями правил дорожнього руху, культури поведінки його учасників. Таким чином формування математичної компетенції тісно пов'язане із життєвими компетенціями і не може формуватися відокремлено.

Зазначимо, що в шкільному курсі фізики явища, які можна описати лінійним рівнянням, не обмежуються лише рівномірним рухом. Наприклад, теплові явища теж описуються лінійними рівняннями. Зокрема, рівняння теплового балансу є джерелом вправ з фізичним змістом, що дозволяють формувати вміння та навички учнів 6-7 класів виконувати тотожні перетворення рівнянь першого порядку, проходити повний цикл таких перетворень: розкривати дужки, зводити подібні доданки, переносити доданки з однієї частини рівняння в іншу, ділити (чи множити) обидві частини рівняння на одне й те саме число, відмінне від нуля.

Завдання 2. Розв'язавши рівняння, визначте температуру, до якої нагріли воду для заварювання чаю  $t$  ( $^{\circ}\text{C}$ ), якщо рекомендована температура заварювання  $96^{\circ}\text{C}$ .

- 1)  $840(t - 20) + 300 = 67500$ ;
- 2)  $21(t - 18) - 38 = 1600$ ;
- 3)  $100 + 42(t - 15) = 604$ ;
- 4)  $230 - 2(t - 20) = 50$ .

Відповідь: 1)  $t = 100^{\circ}\text{C}$  2)  $t = 96^{\circ}\text{C}$  3)  $t = 35^{\circ}\text{C}$ , чай не завариться; 4)  $t = 110^{\circ}$ , не може бути розв'язком, оскільки температура кипіння води в нормальних умовах становить  $100^{\circ}\text{C}$  і не піднімається в процесі кипіння.

Важливу роль щодо можливостей реалізації міжпредметних зв'язків математики і фізики відіграє узгодженість змісту матеріалу, що вивчається як у понятійному, так і у хронологічному аспектах. Реформа освіти передбачає і зміну шкільних навчальних програм, а отже учитель повинен не лише досконало знати програмовий зміст предмету, що викладає, але й знайомитися із програмами суміжних дисциплін та підбирати завдання з міжпредметним змістом, демонструючи тим самим важливість набуття математичної компетенції, як засобу дослідження у різних сферах діяльності людини.

### Література

1. Раков С. А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ: монографія / С. А. Раков. – Х.: Факт, 2008. – 307 с.
2. Сериков В.В. Образование и личность. Теория и практика проектирования педагогических систем. – М.: Издательская корпорация «Логос», 1999. – 272 с.
3. Дик Ю.И., Рыжов М.В. Естественно-математическое образование в современной школе // Педагогика. - 1999. - №8. - С. 24 - 30.

УДК 371.32:512]:004

## КОМП'ЮТЕРНО – ОРІЄНТОВАНІ УРОКИ У ЕВРЕСТИЧНОМУ НАВЧАННІ АЛГЕБРИ

Н.П. Варущик, Я.В. Горох

Освіта - це, перш за все становлення особистості, з її неповторною індивідуальністю, духовністю і творчістю. Оскільки навчання має особистісно-орієнтовану спрямованість, то підхід до створення різних дидактичних матеріалів повинен бути таким, щоб вони були орієнтовані на кожного учня, змогли дати їм можливість рухатися по своїй особистій освітній траєкторії, залучати кожного учня до творчої діяльності та розвивати її в процесі навчання математики.

У зв'язку з цим, зараз є актуальним впровадження у навчальний процес сучасних комунікаційних технологій. Саме вони дозволяють зробити навчання більш наочним і доступним, здійснити індивідуальний підхід.

Використання комп'ютерів у навчальному процесі сприяє активізації навчально-пізнавальної та евристичної діяльності учнів. Вони дозволяють подавати матеріал на якісно вищому рівні наочності, значно розширюють можливості включення різноманітних вправ у процес навчання тощо.

В останні роки в Україні та за її межами багато провідних дослідників інтенсивно працюють над питанням запровадження в навчальний процес засобів СКТ. Ці питання відображені в працях М. Жалдака, Ю. Рамського, С. Ракова, А. Пенькова, Ю. Горошко, В. Дровозюка, Н. Морзе, Т. Крамаренко, О. Скафи, О. Тузової та ін.. Водночас сьогодні недостатньо розроблені методики навчання шкільних предметів на основі СКТ. Низка аспектів з даної проблеми потребує подальших досліджень.

Упровадження інформаційно-комунікаційних технологій у навчальний процес неможливе без умілого використання різноманітних форм організації навчального процесу. Основною формою навчання в школі є урок, як одна з головних колективних форм організації навчання.

Урок, на якому застосовуються інформаційно-комунікаційні технології, є комп'ютерно-орієнтованим уроком. Ознаки, притаманні комп'ютерно-орієнтованому уроку:

- наявність певних дидактичних, виховних і розвивальних цілей, які містять цілі використання ІКТ, наприклад, формування комп'ютерної грамотності, забезпечення наочності завдяки інтерактивній дошці та ін.;
- відбір відповідно до поставлених цілей конкретного навчального матеріалу й рівня його засвоєння;
- досягнення поставлених цілей шляхом підбору відповідних педагогічних програмних засобів і методів навчання;
- організація відповідної навчальної діяльності учнів в умовах застосування ІКТ.

Проектування комп'ютерно-орієнтованих уроків починається зі складання календарно-тематичного плану вивчення розділу, в якому використання СКТ оптимально розподіляється по всіх уроках. Після цього аналізується зміст, що відноситься до обраного фрагменту навчальної діяльності і методика його викладання з метою обґрунтування необхідності впровадження інформаційно-комунікаційних технологій, проектується набір завдань для комп'ютерно-орієнтованих уроків, відбираються педагогічні програмні засоби для розробки завдань, створюються комп'ютерні завдання із застосуванням вибраних програмних засобів, проводиться експертиза, апробація й редагування розроблених комп'ютерних завдань. Останнім етапом є розробка методичних рекомендацій для вчителя й учня. [1]

Наприклад, у таблиці 1 «Тематичне планування теми «Інтеграл та його застосування» пропонується можливий варіант тематичного планування з поурочним плануванням доцільного використання педагогічних програмних засобів до кожного з них. ППЗ заковані цифрами, які дозволяють зручніше оформляти планування.

Вивчаючи тему «Інтеграл та його застосування» доцільно використовувати наступні ППЗ:

- 1) GRAN 1;
- 2) GRAN-2D;
- 3) HDC;
- 4) «Открытая математика 2.5. Функции и графики»;
- 5) «Виртуальная школа Кирилла и Мефодия. Уроки алгебры, 10-11»;
- 6) «Л.Я. Боровский. Курс математики для школьников и абитуриентов XXI века»;
- 7) «НК-Слушатель: Математика абитуриенту 2.0»;
- 8) «НК-Слушатель: Алгебра и начала анализа. 10-11»;
- 9) «НК-Слушатель: Алгебра и начала анализа: итоговая аттестация»;
- 10) «НК-Слушатель: Математика 2.0. Подготовка к экзаменам в вузы Украины»;
- 11) «Teach Pro: Математика 7-11»;
- 12) «Математика, 5-11 кл. Практикум»;
- 13) ИКТС 1.21, My Test;
- 14) презентації, створені у середовищі MS Power Point.

Основна мета вивчення теми – формування поняття первісної та інтеграла, уявлення про операцію інтегрування як оберненої до операції диференціювання; сприяти розвитку вміння її

навичок застосовувати інтеграл до обчислення площ криволінійних трапецій і об'ємів найпростіших тіл.

У процесі вивчення первісної, варто розглянути задачі, які мотивують її введення, з'ясовують механічний і геометричний зміст визначеного інтеграла. Необхідно детально зупинитися на моделюванні прикладних задач, які розв'язуються за допомогою знаходження інтеграла.

Таблиця 1

Тематичне планування теми «Інтеграл та його застосування» з використанням ППЗ

№ уроку	Тема уроку	Педагогічні програмні засоби
1	Деякі задачі, що приводять до необхідності відновлення функції за її похідною. Поняття первісної для даної функції на заданому проміжку. Теорема про структуру сукупності всіх первісних для даної функції. Поняття невизначеного інтеграла від даної функції на заданому проміжку. Інтегрування як операція, обернена до операції диференціювання.	3 – 6, 11, 14.
2	Основні властивості невизначеного інтеграла. Таблиця основних інтегралів.	4 – 12, 14.
3	Метод зведення до «табличних» інтегралів за допомогою перетворення підінтегральної функції.	4, 5, 7 – 11, 14.
4	Розв'язування вправ на знаходження невизначених інтегралів.	4, 5, 7 – 14.
5	Деякі задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла (задача про обчислення площі криволінійної трапеції, задача про обчислення роботи змінної сили). Означення та основні властивості визначеного інтеграла.	4, 5, 7 – 14.
6	Формула Ньютона – Лейбніца.	4, 5, 7 – 14.
7	Обчислення визначених інтегралів.	7 – 10, 12 – 14.
8	Обчислення площ плоских фігур за допомогою інтеграла.	1 – 2, 14.
9	Розв'язування вправ на знаходження площ плоских фігур.	1 – 2, 14.
10	Обчислення об'ємів тіл за допомогою інтеграла.	1 – 2, 14.
11	Розв'язування вправ на знаходження об'ємів тіл.	1 – 2, 14.
12	Використання інтеграла у фізиці і техніці.	4, 12 – 14.
13	Використання інтеграла в економіці.	4, 12 – 14.
14	Деякі задачі математики, фізики, природознавства, що приводять до залежностей, які зв'язують значення невідомої функції, її похідної та аргументу. Поняття про диференціальні рівняння.	4, 12 – 14.
15	Підсумкове повторення теми	1 – 14.
16	Тематична контрольна робота.	3, 13, 14.

Для прикладу розглянемо фрагмент уроку формування вмінь та навичок на тему: «Розв'язування вправ на знаходження об'ємів тіл». Спочатку при розробці комп'ютерно-орієнтованого уроку підбирається вчителем зміст навчального матеріалу, складається план-конспект уроку з наявними завданнями та ідеями їх реалізації. Тоді вчитель розробляє задуманий урок засобами комп'ютерної техніки та ППЗ (GRAN 1 та GRAN-2D), презентаціями.

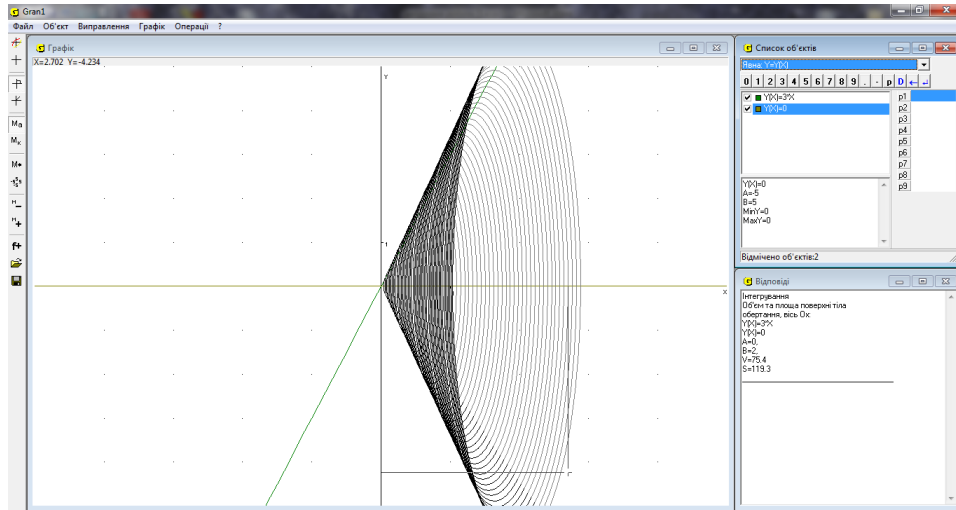
Для формування вмінь знаходити об'єм фігури за допомогою інтеграла варто провести групову роботу учнів з використанням програми GRAN 1. Клас доцільно поділити на групи, дати завдання, спроектувавши їх на мультимедійну дошку.

Учитель може запропонувати учням роботу такого змісту:

- Знайти об'єм фігури двома способами:
  - побудувати фігуру та обчислити об'єм у зошиті за допомогою формули;
  - побудувати фігуру в програмі GRAN 1 та знайти її об'єм в програмі.
  - порівняти знайдені об'єми фігур та зробити відповідні висновки.
- Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої:
  - графіком функції  $y = 3x$  та прямими  $x = 2$ ,  $y = 0$ ;
  - графіком функції  $y = x^2 + 1$  та прямими  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$ .

- кривою  $y = x^3$  і прямими  $x = 1$  і  $x = 2$ .  
Кожна група отримає зображення об'ємної фігури на екрані, значення об'єму фігури та площі поверхні, утвореної даними кривими.

Наприклад, зображення групи 1 матиме вигляд:



Мал. 1

Порівнявши знайдені об'єми, які учні отримали обчисливши інтеграл в зошиті та в програмі, і відповідні малюнки переконалися, що вони однакові. GRAN 1 дає змогу швидше та наочніше знаходити об'єми фігур, утвореними прямими та графіком функції.

Учні представляють результати своєї діяльності вчителю, обґрунтують розв'язання, а згодом перевіряють правильність своїх міркувань. Для цього вчитель проектує на мультимедійну дошку правильні відповіді завдань.

$$\begin{aligned}
 1) \quad V &= \pi \int_0^2 9x^2 dx = 24\pi \text{ (од.}^3\text{)} \\
 2) \quad V &= \pi \int_0^2 (x^4 + 2x^2 + 1) dx = 13\frac{11}{15}\pi \text{ (од.}^3\text{)} \\
 3) \quad V &= \pi \int_0^2 (x^3)^2 dx = 18\frac{1}{7}\pi \text{ (од.}^3\text{)}
 \end{aligned}$$

Мал. 2

Методика застосування комп'ютера на уроках різного типу не може бути однаковою. Зміст конкретного уроку, різні можливості педагогічних програмних засобів, різний професійний рівень підготовки вчителів в області ІКТ впливають на методичні прийоми використання комп'ютера. Вирішальне значення мають також вікові особливості учнів і рівень їх математичної підготовки.

Мультимедійний урок – один із видів комп'ютерно-орієнтованих. Для прикладу розглянемо фрагменти уроків по формуванню понять, вивченню тверджень, розв'язуванню задач.

Поняття лінійного рівняння формуватимемо конкретно-індуктивним методом у відповідності до методичної схеми: розгляд емпіричного матеріалу, його математизація, наведення прикладів і контр-прикладів.

Спочатку учням пропонується розглянути задачі такого змісту.

*Задача 1.*

Купили 3 кг цукерок по  $x$  кг та 4 кг печива по  $y$  кг, в цілому потратили 85 грн. Запишіть розв'язання задачі рівнянням.

$$(3x+4y=85)$$

*Задача 2.*

На відстані 720 км на зустріч один одному виїхали два мотоциклісти: перший зі швидкістю  $x$ , другий зі швидкістю  $y$ . Складіть рівняння, що описує дану ситуацію, тобто рух мотоциклістів до зустрічі, якщо відомо, що перший був у дорозі 3 години, а другий – 4 години.

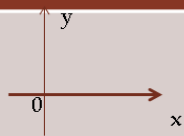
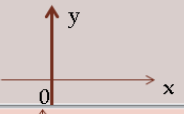
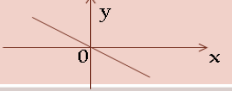
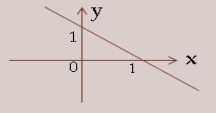

$$(3x+4y=720)$$

На етапі математизації пропонуємо узагальнити розв'язки задач і формулюємо означення.

Рівняння виду  $ax+by=c$ , де  $a, b, c$  – дані числа, називається лінійним рівнянням з двома змінними  $x$  і  $y$ . Якщо  $a \neq 0$  і  $b \neq 0$ , його називають рівнянням першого степеня з двома змінними.

Для закріплення слід заповнити таку таблицю:

Таблиця 2

Значення коефіцієнта	Приклад	Графік
1. $a=0$ , $b \neq 0$ , $c=0$	$a=0$ , $b=5$ , $c=0$ $0x+5y=0$	
$b=0$ , $c \neq 0$	$0x+0y=5$	Не має розв'язків.
2. $a \neq 0$ , $b=0$ , $c=0$	$a=5$ , $b=0$ , $c=0$ $5x+0y=0$	
$b \neq 0$ , $c=0$	$5x+5y=0$	
$b \neq 0$ , $c \neq 0$	$5x+5y=5$	
$b=0$ , $a \neq 0$ , $c=0$	$5x+0y=0$	
$a=0$ , $b=0$ , $c=0$	$0x+0y=0$	Уся координатна площина

### Робота над теоремою.

Перед вивченням теореми Вієта учні виконували домашнє завдання актуалізуючого характеру. Розв'язати квадратні рівняння і заповнити таблицю.



Таблиця 3

Рівняння	$x_1$	$x_2$	a	b	c	$x_1 + x_2$	$x_1 \cdot x_2$
$x^2 - 4x + 3 = 0$	3	1	1	-4	3	4	3
$x^2 - 2x - 3 = 0$	1	-2	1	4	-3	-1	-2
$x^2 + 3x - 4 = 0$	1	-4	1	3	-4	-3	-4
$x^2 - 4x - 21 = 0$	7	-3	1	-4	-21	4	-21

Порівняти із сумою коренів коефіцієнт b.

Порівняти c із добутком коренів.

Учні самостійно можуть сформулювати зміст теореми Вієта. З метою осмислення і запам'ятовування точне формулювання і математичний запис теореми проєктується на екран.

$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b \\ x_1 \cdot x_2 = c \end{cases}$  - це зміст теореми Вієта, сформулюємо її: якщо  $x_1$  та  $x_2$  – корені рівняння,

$x^2 + bx + c = 0$ , то виконується  $\begin{cases} x_1 + x_2 = -b \\ x_1 \cdot x_2 = c \end{cases}$ . Пошук доведення теореми доцільно провести аналітичним методом.

Пропонуємо варіант евристичної бесіди.

Учитель. Розгляньте систему  $\begin{cases} x_1 + x_2 = -b \\ x_1 \cdot x_2 = c \end{cases}$  і намітьте шлях доведення.

Учень. Слід записати значення коренів рівняння (за формулами):

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2},$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2}.$$

Знайти їх добуток і суму.

Учитель. Спробуйте зробити це самостійно( за варіантами).

З метою самоконтролю учні можуть зіставити свої результати тотожних перетворень виразів з тими,що спроектовані на екран.

Доведення:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2} + \frac{-b + \sqrt{D}}{2} = \frac{-b - \sqrt{D} - b + \sqrt{D}}{2} = -b,$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2} \cdot \frac{-b + \sqrt{D}}{2} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{D})^2}{4} = \frac{b^2 - D}{4} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4} = c.$$

На закріплення теореми варто дати учням індивідуальні завдання такого змісту:

скласти рівняння за коренями  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = -5$ .

$$x^2 - (3 + (-5))x + 3(-5) = 0,$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0.$$

Зекономити час на перевірку кожного завдання можна спроектувавши на мультимедійну дошку розв'язання відповідного завдання.

Робота над задачею:

Моторний човен проплив 8 км за течією річки і повернувся назад, витративши на весь шлях 54 хв. Знайдіть швидкість течії, якщо власна швидкість човна дорівнює 18 км/год.

Робота над змістом:

Про що йде мова в задачі? (про шлях, який пройшов човен за 54 хв.)

Що невідоме за умовою? (швидкість течії, час за який човен проплив за течією та час проти течії)

Що позначаємо за  $x$  і яка порівняльна величина? (час)

Що означає число 8? Що означає число 18?

Скорочений запис подайте у вигляді таблиці:

Таблиця 4

	s	v	t
За течією	8 км		} 0,6 год
Проти течії	8 км		
Швидкість течії		x км/год	
Власна швидкість човна		18 км/год	

Подумайте і розв'яжіть задачу алгебраїчним методом

Пояснення до складання рівняння:

Нехай x км/год – швидкість течії, тоді:

(x+18) км/год – швидкість за течією,

(x-18) км/год – швидкість проти течії.

Маємо рівняння:

$$\frac{8}{18+x} + \frac{8}{18-x} = \frac{9}{10},$$

$$\frac{8(18-x+18+x)}{18^2-x^2} = \frac{9}{10},$$

$$\frac{8 \cdot 36}{18^2-x^2} = \frac{9}{10},$$

$$320 = 324 - x^2,$$

$$x^2 = 4,$$

$$x = 2.$$

Відповідь: 2 км/год.

Виконайте перевірку:

Швидкість за течією – 20 км/год,

Швидкість проти течії – 16 км/год,

тоді  $\frac{20-16}{2} = 2$  км/год.

Відповідь: 2 км/год.

Ознайомлення зі зміст задач, заповнення таблиць побудову графіків стає можливо виконати за допомогою комп'ютера.

У даній ситуації роль учителя переходить на задній план. Перевага мультимедійних технологій перед попереднім поколінням ТЗН є очевидною. Учитель може представляти інформацію з різних каналів сприйняття, в будь-якому режимі, дозовано. Йому легко керувати підключенням, редагуванням візуальних, аудіальних, друкованих джерел інформації [2].

### Література

1. Скафа О. І. Комп'ютерно – орієнтовані уроки в евристичному навчанні математики: навчально – методичний посібник/ О. І. Скафа, О. В. Тутова – Донецьк: вид – во «Вебер», 2009. – 320 с.
2. Дизайн мультимедійного уроку: методика, технологические приемы, фрагменты уроков / сост. Г. О. Авастацатуров. – Волгоград. Учитель. 2009 – 133с.

УДК 371.32:511.1

## РОЗВИТОК ПІЗНАВАЛЬНОЇ АКТИВНОСТІ У ЕВРИСТИЧНОМУ НАВЧАННІ ЧИСЛОВИХ СИСТЕМ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ БАЗОВОЇ ШКОЛИ

Н.П. Варущик, В.М. Андруша

У сучасних умовах розвитку України перебудова системи освіти – життєво необхідний процес. Школа перебуває на етапі переходу до нового розуміння завдань, проблем, використання нових методів і підходів у навчанні. Однією з актуальних проблем на сучасному етапі розвитку педагогічної теорії та практики є активізація пізнавальної діяльності учнів, адже від неї залежить ефективність навчання: свідоме і міцне здобуття знань, перетворення знань у переконання, розвиток інтересу до навчальної діяльності, самостійність думки та практичних дій учнів.

Пізнавальна активність дитини – це її внутрішня готовність до подальшої участі у процесі оволодіння знаннями, уміннями і навичками та виявлення самостійності й творчого підходу до виконання навчальних завдань. У центрі навчально-виховного процесу має бути учень. Активність, бажання і здатність до навчання, уміння спілкуватися, співпрацювати, міркувати, обґрунтовувати свої думки, бути собою закладаються у процесі навчання на уроках математики.

Загальні питання цієї проблеми досліджували відомі психологи (К. Абульханова-Славська, Л. Виготський, С. Максименко, О. Кабанова-Меллер, О. Матюшкін, В. Моляко, С. Рубінштейн, Н. Талізіна і ін.) та педагоги (Ш. Амонашвілі, Л. Аристова, М. Галагузова, В. Корнєєв, Л. Косяк, Н. Крохіна, І. Романенко, Т. Шамова, К. Одарчук і ін.).

Проблеми розвитку пізнавальної активності на прикладі вивчення числових систем у базовій школі розроблене недостатньо, тому дана тема є предметом дослідження.

Під системою числення розуміють сукупність слів, знаків, правил за допомогою яких можна записати та прочитати будь-яке число. Розрізняють позиційні і не позиційні системи числення. У позиційних системах числення значення кожної цифри залежить від місця її знаходження у записі числа. Прикладом непозиційної системи числення є римська нумерація; позиційної – десяткова, двійкова, вісімкова та ін. Спосіб запису та читання чисел за допомогою знаків та слів називається відповідно письмовою та усною нумерацією.

У математиці існує два підходи введення числових систем: аксіоматичний та конструктивний. У шкільному курсі присутні обидва ці підходи.

Вивчення чисел в шкільному курсі математики ведеться в такій послідовності: натуральні числа, нуль, дробі (додатні), від’ємні числа і множина раціональних чисел, ірраціональні числа і множина дійсних чисел. Ця послідовність відображає історичний шлях розвитку поняття числа в математиці:  $N \rightarrow Q^+ \rightarrow Q \rightarrow R$ . У сучасній математиці прийнята інша послідовність:  $N \rightarrow Z \rightarrow Q \rightarrow R$  (логічна схема розвитку поняття числа).

Розширення числових систем відбувається у відповідності до принципів перманентності і мінімальності.

На кінець вивчення теми учні повинні вміти читати, записувати, порівнювати числа, знати закони арифметичних дій, алгоритми та правила виконання дій, вміти виконувати усні та письмові обчислення раціональними способами з використанням законів арифметичних дій; знаходити НСК та НСД кількох чисел, розрізняти прості і складені числа, застосовувати ознаки їх подільності; усні обчислювальні навички повинні бути доведені до автоматизму. них повинно бути сформоване уявлення про раціональне число як нескінченний десятковий періодичний дріб, а ірраціональне як нескінченний десятковий неперіодичний дріб, розрізняти поняття дробу і дробового числа, вміти перетворювати періодичні дроби у звичайні і навпаки.

У відповідності до принципів науковості і доступності в учнів ще з початкової школи формується уявлення про властивості множини натуральних чисел (властивість нескінченності, дискретності та впорядкованості), особливості позиційної системи числення. З цією метою виконуються вправи на розбір числа за схемою, наприклад:

- 1) Запишіть число 789 649;
- 2) Назвіть сусідів цього числа;
- 3) Запишіть число сумою розрядних доданків, сумою одиниць кожного класу;

4) Скільки всього цифр у записі числа, скільки різних цифр?

5) За допомогою цих цифр напишіть найбільше та найменше число.

6) Вказати найвищий розряд цього числа. Записати найбільше та найменше число з цим самим розрядом

7) Назвати кількість одиниць кожного розряду та загальну кількість одиниць, десятків, сотень, одиниць тисяч, десятків тисяч, сотень тисяч.

У курсі математики 5-6 класів посилюється роль теоретичного матеріалу, проте тема натуральні числа містить ряд питань раніше відомих учням, тому з метою розвитку пізнавальних інтересів слід вчити помічати закономірності. Цьому сприятиме робота над виконанням завдань виду:

а) Обчислити раціональним способом  $1+2+3+\dots+8+9$ , запам'ятати, що сума одноцифрових чисел рівна 45.

б) Скільки існує двоцифрових чисел, у яких цифра десятків більша цифри одиниць?

Розв'язання

$$\begin{matrix} 10; & 20; 21; & 30; 31; 32; & \dots; & 90; 91; 92; \dots; 98 \\ 1 & 2 & 3 & & 9 \end{matrix}$$

Відповідь: 45.

в) Скільки існує двоцифрових чисел, цифри яких існують у зростаючому порядку?

$$\begin{matrix} 12; 13; \dots; 19; & 23; 24; \dots; 29; & \dots; 89 \\ 8 & 7 & 1 \end{matrix}$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + 8 = 45 - 9 = 36$$

Розв'язування вправи підвищеної складності сприятиме розвитку теоретичного мислення:

а) Доведіть, що числа, запис яких містить три однакові цифри, діляться на 3 і 37.

Розв'язання

$$\overline{aaa} = 100a + 10a + a = 111a = 3 \cdot 37 \cdot a$$

б) Доведіть, що коли сума цифр ділиться на 9, то і числа діляться на 9.

Розв'язання

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c = 99a + a + 9b + b + c = (99a + 9b) + (a + b + c) = 9(11a + b) + (a + b + c)$$

Перший доданок ділиться на 9, щоб сума ділилась на 9 потрібно, щоб і другий доданок ділився на 9, тобто сума цифр числа повинна ділитися на 9.

Кожен учень повинен навчатися в міру своїх можливостей, тому ще одним напрямом розвитку пізнавальної активності є залучення дітей до частково – пошукової діяльності.

Активізувати навчально-пізнавальну діяльність учнів, залучити їх до самостійного закріплення знань, формування навичок самоконтролю можна шляхом виконання керованих самостійних робіт. Завдання підбираються так, що відповідь попереднього прикладу включається у наступний, а розв'язком останнього є наперед задане число. Можливі варіанти завдань по темі «Дробі»:

а) найглибше озеро в Україні –

$$\frac{7}{9} + 0,4; \quad 1,8 - \frac{5}{8}; \quad \frac{5}{6} + 0,6; \quad 3,6 : \frac{3}{5}; \quad 1,8 - \frac{4}{3}; \quad 2,3 \cdot 1 \frac{3}{7}.$$

$$2 \frac{1}{2} - i; \quad 1 \frac{18}{45} - я; \quad 3 \frac{2}{7} - в; \quad 6 - с; \quad \frac{7}{15} - ь; \quad 1 \frac{7}{40} - з.$$

б) Отримай «12»

$$5\frac{3}{4} + 4\frac{1}{4} = a, \quad b + 11\frac{4}{6} = c, \quad d - \frac{2}{7} = m, \quad m - 4\frac{1}{7} = n,$$

$$a - \frac{5}{6} = b, \quad c - \frac{5}{6} = d, \quad n - 3\frac{4}{7} = 12$$

Важливе значення на уроках математики має метод гри. З метою закріплення теоретичного матеріалу та розвитку пізнавальних інтересів на уроці по темі «Цілі числа» можна застосувати прийом гри «Математичний волейбол». Клас ділиться на дві команди. Обираються судді які стежить за часом та записують рахунок на дошці. Умови гри: подача – це запитання з теоретичного матеріалу або вправа на усне обчислення. Вона адресується конкретному гравцеві команди. Протягом встановленого часу цей гравець повинен «перепасувати» запитання іншому гравцеві своєї команди, назвавши його прізвище («перепасовка» дозволяється лише один раз), або відбити, відповісти на запитання, після чого послати аналогічне завдання гравцеві іншої команди. Якщо відповідь неправильна або не своєчасна, то команді забито м'яч. Якщо запитання повторене чи не з теми, або неточно сформульоване, відбувається втрата подачі. подача переходить до команди суперників. Гра продовжується до вказаної кількості голів або обумовлений час, після чого визначається команда-переможець, і оцінюються кращі гравці.

Приклади запитань, вправ з теми:

- 1) Які числа називаються натуральними?
- 2) Поясніть, що таке координатна пряма (одичинний відрізок, координата точки на координатній прямій).
- 3) Які числа є взаємно оберненими? А взаємно простими?
- 4) Що таке протилежні числа? Наведіть приклад.
- 5) Яке число є ані додатним, ані від'ємним?
- 6) Чому дорівнює відстань між точками А (-32) і В (-18)?

Залучаючи учнів до гри, учитель повинен пам'ятати, що навчаючи граючись, не слід перетворювати навчальний процес у гру.

Труднощі введення від'ємних чисел в історії математики знаходять певні відображення й при вивченні їх у сучасній школі. Досвід показує, що введення поняття від'ємних чисел не приводить до особливих труднощів, якщо воно добре мотивовано потребами практики. Важче сприймається обґрунтування доцільності правил дій над додатними й від'ємними числами.

Це поняття доцільно вводити описово в тісному зв'язку з потребами практики й інтерпретацією на координатній прямій.

Найвдалішим, на наш погляд, є підхід, коли від'ємні числа вводяться для позначення числових значень величин, які змінюються у двох протилежних напрямках. Пояснення починається із прикладів, які підводять учнів до висновку, що для позначення числових значень таких величин треба вказати напрям зміни величини.

Для введення поняття від'ємного числа не можна обмежитися розглядом якоїсь однієї конкретної ситуації, обмеженим числом прикладів. Якщо це поняття вводиться на прикладі кількох задач, то учні і в аналогічній ситуації навчаться його використовувати.

Перша методична задача, яка виникає при введенні від'ємних чисел, полягає в тому, щоб переконати учнів у необхідності введення нових чисел. Досягається це за допомогою доцільно підібраних задач. Наведемо приклади таких задач.

1. Білка бігає по стовбуру дерева вгору і вниз. Показати на рисунку:

- де знаходиться білка, якщо вона віддалена від дупла на 3 м (чи можна вказати місце знаходження білки одним способом?)

- де знаходиться білка, якщо вона буде:

а) вище дупла на 2 м;

б) нижче дупла на 3 м.

При розв'язанні таких задач, з'ясується, що для того, щоб визначити місцезнаходження білки на дереві, необхідно знати: відстань, на яку вона віддаляється від дупла і напрям, у якому вона перемістилася. З'ясується, що відомих чисел недостатньо для того, щоб дати однозначну відповідь, тому необхідні нові числа.

Розглянуту вище задачу корисно представити в більш математизованій формі. Для цього достатньо замість дерева взяти пряму, замість білки - довільну точку прямої.

У результаті учні будуть підготовлені до сприймання поняття координатна пряма. Учителю необхідно ввести терміни „початок відліку”, „додатній напрям прямої”, „від'ємний напрям прямої”.

Починати пояснення можна з питань:

- 1) Рівень води в Дніпрі змінився на 12 м. Яким він став?
- 2) Температура повітря змінилася на  $5^{\circ}$ . Чи замерзла вода?
- 3) Хлопчик рухається в ліфті дев'ятиповерхового будинку. Ліфт проїхав три поверхи. Хлопець зійшов на п'ятому поверсі. З якого поверху почався рух?

Відповіді на поставлені питання однозначно не можна, якщо невідомо, наприклад, яким був спочатку рівень води щодо умовного нуля і як він змінився - збільшився або зменшився. Аналогічно: якою була спочатку температура відносно початку відліку і збільшилася вона або зменшилася. Куди рухався ліфт вгору чи вниз.

Щоб позначати числом значення величин, які можуть змінюватися у двох протилежних напрямках, були введені від'ємні числа.

Проте, подальше розширення поняття числа обумовлені уже не безпосередньо потребам рахунку і вимірювання величин, а в першу чергу потреба розвитку математики. Введення від'ємних чисел було викликано розвитком алгебри, як науки, що дає загальні способи розв'язування текстових задач. Необхідність введення в алгебру від'ємних чисел виникла при розв'язуванні задач, що зводяться до лінійних рівнянь з однією змінною.

З метою мотивації суто математичних потреб у від'ємних числах можна запропонувати учням розв'язати задачу: одному учню зараз 16 років, а іншому – 9 років. Через скільки років перший учень буде у два рази старший іншого?

Розв'язуючи задачу алгебраїчним методом, учні одержують рівняння  $16 + x = (9 + x) \cdot 2$ , з якого  $x = 16 - 18$ .

Від'ємне число у відповіді таких задач може бути розтлумачене на прикладах найпростіших напрямлених величин (майно – борг, протилежно напрямлені відрізки і т. д.)

Лише за умови свідомого засвоєння знань можливе підтримання активізація пізнавальної діяльності учнів.

Одним із важливих методів активізації пізнавальної діяльності учнів є метод проектів.

З метою узагальнення і систематизації знань, пропонується проект «Числові системи від А до Я». Клас поділяється на підгрупи відповідно до кожної числової системи. До звіту повинна входити історія виникнення та розвитку числа, потреби в науці та практичне застосування. Захист проектів бажано проводити з використанням мультимедійних презентацій.

Пропонуємо фрагмент мультимедійного уроку: захист проекту.

### «Раціональні числа»

#### Історична довідка

Додавати та віднімати від'ємні числа навчилися давні китайські вчені ще до нашої ери. Індійські математики уявляли собі додатні числа як «майно», а від'ємні як борг. Індійські математики уявляли собі додатні числа як «майно», а від'ємні як борг. Ось як індійський математик Брахмагупа (VII ст.) трактував правила додавання і віднімання:

1. «Сума двох боргів є борг»
2. «Сума майна і майна є майно»
3. «Сума майна та боргу дорівнює їх різниці»

Алгоритм додавання (віднімання) раціональних чисел (мал. 1).



Мал. 1

Ян Відман, чеський математик (мал. 2). Ці позначення є в його книзі «Арифметика». Книга видана в 1489 році [1].

Робота в групах такого складу сприяє розвитку соціальних компетентностей (вчать розподіляти обов'язки, спілкування, вміння відстояти власну думку), математичних компетентностей, зокрема технологічних (робота з комп'ютером, мережею інтернет).

Такі заняття сприяють розвитку наукового світогляду, учні усвідомлюють, що кожне математичне поняття і поняття числа виникли з практичних потреб науки і практики, вони описують реально існуючі закономірності навколишнього світу



Мал. 2

Формування обчислювальних навичок на дії з десятковими дробами ефективно відбувається в процесі розв'язування вправ на обчислення значень виразів раціональним способом (на застосування законів арифметичних дій) та перевірка одержаних результатів за допомогою калькуляторів; використання прийому чи методу гри, розв'язуванню цікавих текстових задач.

Розглянемо конкретні приклади:

$$0,(3)=0,3+0,03+0,003+\dots = \frac{0,3}{1-0,1} = \frac{0,3}{0,9} = \frac{3}{9};$$

$$0,(61)=0,61+0,0061+0,000061+\dots = \frac{0,61}{1-0,01} = \frac{61}{99};$$

учні зможуть зробити загальний висновок про те, що чистий періодичний дріб дорівнює звичайному, чисельник якого є число, що стоїть у періоді, а в знаменнику стільки дев'яток скільки цифр у періоді. Абстрактно-дедуктивні міркування можуть провести здібні до математики учні, для цього вчителю досить вказати план доведення та організувати пошук доведення методом бесіди.

Формування уявлення про раціональні числа як нескінченні десяткові періодичні дроби стає можливим у 9 класі після вивчення геометричної прогресії та формули суми членів нескінченно спадної геометричної прогресії.

У процесі вивчення теми є можливість залучати учнів до самостійного відкриття правил. Зокрема, вивчаючи правило перетворення звичайних дробів у десяткові, учні можуть помітити, що не кожен звичайний дріб можна подати у вигляді десяткового. Розв'язавши достатню кількість вправ виділять суттєві достатні ознаки: канонічний розклад знаменника нескоротного дробу повинен містити лише двійки і п'ятірки. Частково пошукова робота учнів сприятиме кращому засвоєнню знань, розвитку їх пізнавальних інтересів.

Для вивчення правил перетворення чистих та мішаних періодичних дробів у звичайні можна поєднати конкретно-індуктивний метод з дедуктивним.

Завдання: перетворити мішаний десятковий дріб у звичайний.

Розглянемо конкретні приклади:

$$0,(3)=0,3+0,03+0,003+\dots = \frac{0,3}{1-0,1} = \frac{0,3}{0,9} = \frac{3}{9};$$

$$0,(61)=0,61+0,0061+0,000061+\dots = \frac{0,61}{1-0,01} = \frac{61}{99};$$

учні зможуть зробити загальний висновок про те, що чистий періодичний дріб дорівнює звичайному, чисельник якого є число, що стоїть у періоді, а в знаменнику стільки дев'яток скільки цифр у періоді. Виникає гіпотеза, яку можуть теоретично обґрунтувати здібні до математики учні, для цього вчителю досить вказати план доведення та організувати пошук доведення методом бесіди.

Нехай десятковий дріб містить  $n$  цифр до періоду і  $k$  цифр у періоді, позначимо його  $x$  і запишемо у вигляді

$$0,\overline{a_1 a_2 \dots a_n} (\overline{b_1 b_2 \dots b_k}) = x$$

План доведення

- 1) зведіть мішаний періодичний дріб до чистого періодичного;
- 2) застосуйте правило перетворення його у звичайний.

Що для цього достатньо зробити? (Помножити обидві частини рівності на «10», записати одержаний дріб у вигляді цілої частини та дробової, дробову подати у вигляді звичайного дробу, з одержаного рівняння знайти  $x$ ).

$$\overline{a_1 a_2 \dots a_n} + 0,\overline{b_1 b_2 \dots b_k} = x \cdot 10^n;$$

$$\overline{a_1 a_2 \dots a_n} + \frac{\overline{b_1 b_2 \dots b_k}}{10^k - 1} = 10^n \cdot x;$$

$$x = \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_k} - \overline{a_1 a_2 \dots a_n}}{(10^k - 1) \cdot 10^n};$$

Одержаний результат сформулюйте у вигляді правила та застосуйте до розв'язування вправ, наприклад:

$$7,3(12) = 7 \frac{312 - 3}{990} = 7 \frac{309}{990} = 7 \frac{109}{110},$$

$$0,51(7) = \frac{517 - 51}{900} = \frac{466}{900} = \frac{233}{450}.$$



Учні повинні усвідомити, що будь-який нескінченний десятковий періодичний дріб є раціональне число.

Це дасть змогу учням зробити висновок про те, що нескінченні десяткові неперіодичні дробі не є раціональними числами, тобто вони є ірраціональними.

Створення аналогічних ситуацій успіху, де учень у відповідності своєму рівню підготовки та математичних здібностей, відчуває себе першовідкривачем, здатний зробити особисто - значущі відкриття, пройти шлях від гіпотези до її обґрунтування чи спростування, в значній мірі активізують навчально-пізнавальну діяльність, сприяють розвитку пізнавальних інтересів.

### Література

1. Кужель О. В. Розвиток поняття про число. Ознаки подільності. Досконалі числа / О. В. Кужель, - вид. об'єд. «Вища школа», 1974.
2. Метод проектів на уроках математики / навч-метод. посібник, - вид - во «Ранок», Тернопіль 2012.

УДК 37.02

## МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ОНЛАЙН СЕРВІСУ PREZI.COM

Н.О. Головіна

Комп'ютерні презентації є важливим засобом навчання, який використовує в своїй професійній діяльності сучасний вчитель. Сучасні студенти добре володіють можливостями популярних програм створення електронних слайдових презентацій таких, як MS PowerPoint та OOo Impress. Але, останнім часом набувають популярності засоби опрацювання різноманітних документів, що розміщені в Інтернеті. Подібні засоби є і для створення презентацій: Google Presentations (<http://docs.google.com>), Prezi.com (<http://prezi.com>), Zoho Show (<http://show.zoho.com>), SlideRocket (<http://www.sliderocket.com>), Sppresent (<http://www.sppresent.com>) тощо. Основними перевагами використання цих засобів є їхня безкоштовність і доступність з будь-якого комп'ютера, підключеного до мережі Інтернет. Знання таких сервісів значно розширить можливості майбутніх вчителів. Найпопулярнішим серед них є on-line сервіс Prezi.com, з яким можна ознайомити студентів при вивченні дисципліни «Інформаційні технології навчання».

Сервіс Prezi ([prezi.com](http://prezi.com)) - це потужний англomовний онлайн-інструмент для створення презентацій. Безкоштовна версія сервісу надає можливість створення презентацій (у тому числі колективних) і 100 МБ місця в хмарному сховищі. Створені в безкоштовній версії презентації видно всім користувачам.

У Prezi дуже добре реалізований механізм зумінгу, тобто зміни масштабу зображення в процесі перегляду, що дає змогу створювати презентації нового виду з нелінійною, ієрархічною структурою. Всю презентацію можна згорнути в одну картинку, і навпаки, кожен елемент презентації може бути збільшений (акцентовано) для більш детального вивчення та залучення уваги.

Для того щоб почати роботу з Prezi, потрібно зареєструватися на сайті або залогінитися за допомогою облікового запису в Facebook/LinkedIn. Інтерфейс сервісу принципово відрізняється від інтерфейсу PowerPoint або Google Presentations.

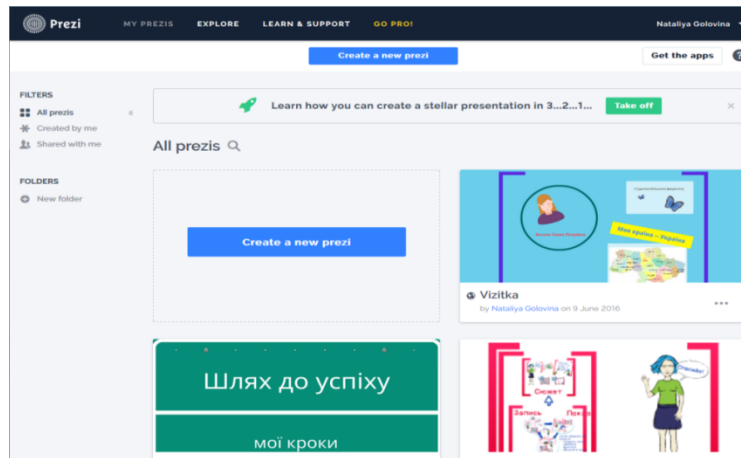
Сайт он-лайн сервісу Prezi.com складається із трьох основних вкладок:

Перша вкладка, **Myprezis** (Мал. 1) – тут можна почати створювати нову презентацію, або переглядати вже готові. Також їх можна доопрацьовувати, редагувати та видаляти.

Друга вкладка **Learn & Support** – навчання та підтримка: на відео демонструються принципи роботи покроково (на англійській мові).

Explore – знаходяться приклади готових презентацій, створених іншими користувачами сервісу (перегляньте декілька з них).

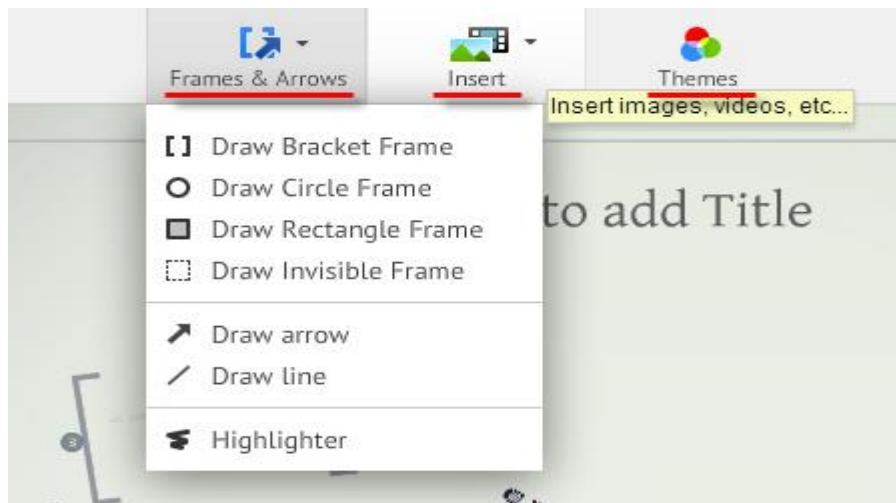
Для створення власної презентації потрібно повернутись на вкладку **MyPrezis** та натиснути на **CreateNewprezi**.



Мал.1

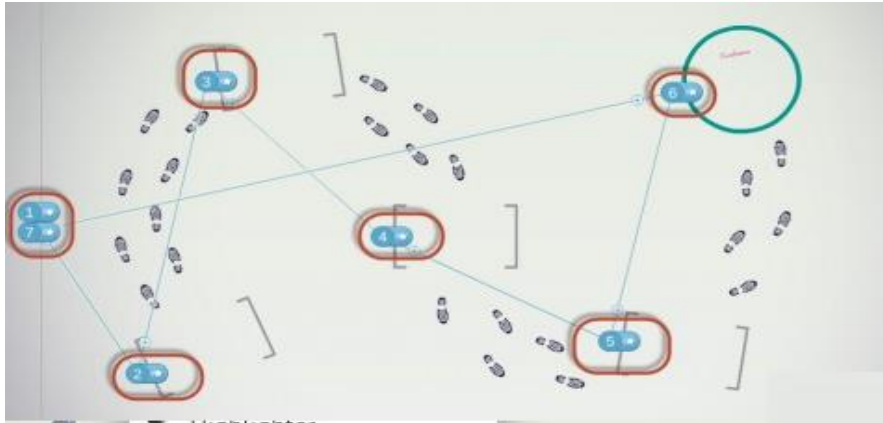
Відкриється нова вкладка браузера, в якій пропонують обрати шаблон презентації. Обираємо необхідний шаблон та тиснемо **Use template**. Також можна запустити порожню презентацію. Для цього потрібно натиснути на **Start blank prez!**.

Наступним кроком буде наповнення презентації. У вікні редактору, який відкрився, потрібно внести зміни в шаблон. У верхній частині розміщена панель, на якій можна додати нові записи, зображення, відео, схеми, фрейми, зміни кольору та типу шрифту. Також присутня можливість малювати, за допомогою вбудованого пензля. (Мал.2).



Мал.2

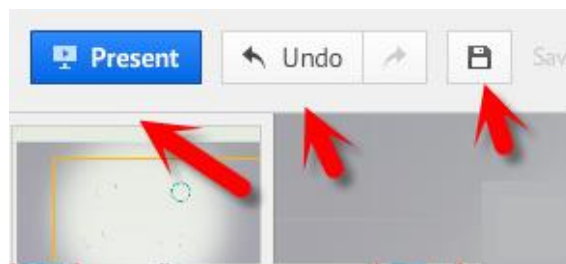
При створенні нової презентації отримуєте в розпорядження безрозмірне полотно (canvas), яке заповнюєте довільною інформацією та об'єктами. Слайдами якої є фрейми, що взаємопов'язані між собою. Фрейм може бути доданий у вигляді дужок, кола, зафарбованого прямокутника або невидимого прямокутника. На фрейми можна додавати тексти, автофігури, зображення як із вбудованої бібліотеки так і з файлу, відео із YouTube. При додаванні об'єктів в презентацію, їх потрібно поєднувати між собою по черзі, так, як би відбувався перехід між ними (Мал.3).



Мал.3

На лівій панелі розташований список елементів, натиснувши на кожен з них — можна перейти до його редагування. Також можна додавати, або вилучати елементи та зв'язки між ними.

Усі зміни, які вносяться в презентацію автоматично зберігаються. Для примусового зберігання можна натиснути на кнопку з дискетою, що розташована у верхній стрічці редактора. Поруч з нею також є кнопки відміни останніх змін та попереднього перегляду презентації **Present** (Мал.4).



Мал.4

Коли презентація буде готовою, нею можна буде поділитись з іншими. Для того, щоб отримати публічне посилання, варто натиснути на кнопку **Share** та обрати пункт **Present Remotely**. Відкриється вікно, де і буде посилання на презентацію <http://youtu.be/7bHyW6un-Kc>. В тому самому меню можна також розшарити презентацію через фейсбук або скачати PDF версію або відеоролик.

Ознайомившись із теоретичною інформацією, студенти можуть виконати наступні практичні завдання.

### Завдання 1. Порівняння презентацій:

**Перегляньте презентації створені за допомогою веб-сервісу Prezi.com. Укажіть відмінності вказаних презентацій від презентацій створених за допомогою MS PowerPoint та OOO Impress. Визначте основні об'єкти презентацій**

**Презентації, виконані за допомогою веб-сервісу Prezi.com:**

Запрошуємо до Єгипту – <http://prezi.com/agobnhcc9rgn>;

Випадкові події – [https://prezi.com/h2jh\\_u7v6buya](https://prezi.com/h2jh_u7v6buya);

Демографічні факти – <https://prezi.com/pw8ay2yq-qbw>;

PreziWonderlandbyTrenzeta – <http://youtu.be/7bHyW6un-Kc>;

Работа в Preziza 15 мин – <https://prezi.com/t3iulgcemli>;

Создание аватарки – <https://prezi.com/0sv0suu9ryaw>;

Площадь – <https://prezi.com/fbl2bd6fqhio>.

**Завдання 2. «Кроки» по сайту:**

1. Зареєструйтеся на сайті <http://prezi.com/> (натиснути кнопку Signup, обрати безкоштовну версію реєстрації, увести свої дані). Отримати підтвердження на пошті про реєстрацію.
2. Зайдіть на свою сторінку (натиснути на фоновій сторінці Create, оберіть будь-який шаблон презентації).
3. Перегляньте шаблон на сайті (Edit prezі).
4. Ознайомтесь з інструментами сайту (в лівому і верхньому меню вивчіть інструменти редагування).
5. Перегляньте результат в режимі «Present» (для виходу із режиму – натисніть Esc).
6. Перемістіть елементи в шаблонній презентації по полю редагування. Зробіть інший кут нахилу картинки (візьміть курсором картинку за край і обертайте коло, що з'явилось).
7. В режимі створення черги слайдів (Edit Path в лівому меню) перебудуйте порядок показу слайдів.
8. Перегляньте результат. Збережіть свою роботу (натисніть Save в режимі редагування). Вийдіть із режиму – Exit.
9. Поверніться у вікно My prezis та перегляньте наявні презентації у особистому кабінеті.
10. Завершіть роботу з програмою: у верхньому меню під назвою вашого акаунту команда Logout.

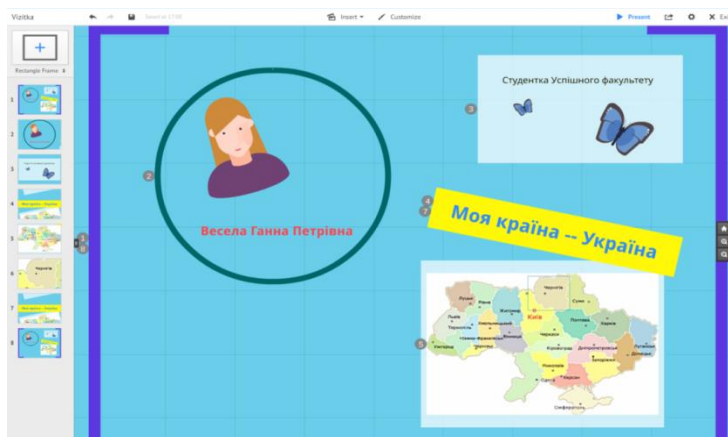
**Завдання 3. Перетворення презентації :**

1. Загрузіть на сайт презентацію, що була створена в PowerPoint. (Для цього, збережіть презентацію, у форматі PDF та додайте її у Prezi в режимі редагування, натиснути на значку Images у верхньому меню, далі Fromfile (PDF, video)).
2. Зачекайте завантаження слайдів. Перемістіть слайди в область редагування, змініть їх кут нахилу. Оберіть порядок показу слайдів (Edit Path в лівому меню) на власний розсуд. Зменшіть або збільшіть слайди.
3. Перегляньте результат. Збережіть свою роботу (натисніть Save в режимі редагування). Вийдіть із режиму – Exit. Поверніться у вікно Myprezis та перегляньте наявні презентації у особистому кабінеті.

**Завдання 4. «Візитна картка»**

Візитна картка на сьогоднішній день є необхідністю. Можна в сервісі Prezi.com створити свою візитку, а потім просто дати на неї посилання, або розмістити її у своєму блозі, на сторінці сайту.

Створіть візитну картку, наприклад, за таким зразком (див. Мал. 5). Для цього оберіть порожню презентацію. На перший слайд (фрейм), додайте нові фрейми у різних виглядах, наповніть їх необхідною інформацією. Побудуйте необхідний порядок показу слайдів.



Мал.5

**Завдання 5. Творче завдання**

Створіть презентацію на певну тему:

1. Навколишнє середовище і здоров'я.
2. Як досягти поставленої мети?
3. Чому я вибрав саме цю професію?
4. Як я став учителем?
5. Види сучасних уроків та їх етапи.
6. Підготовка вчителя до уроку.
7. Індивідуальний розвиток дитини.

**Література**

1. Prezi. [Електронний ресурс]. Режим доступу: <http://prezi.com/>
2. [https://wiki.fizmat.tnpu.edu.ua/index.php/Новий\\_стиль\\_презентацій\\_Сервіс\\_Prezi](https://wiki.fizmat.tnpu.edu.ua/index.php/Новий_стиль_презентацій_Сервіс_Prezi)
3. Германюк Н.М., Щербина О.А. Створення ієрархічних ментальних мап за допомогою web-сервісу PREZI [Електронний ресурс]. Режим доступу <http://2013.moodleoot.in.ua/course/view.php?id=49&lang=ru>

УДК 004.2

**ПОДАННЯ СИНТАКСИЧНОЇ КІЛЬКОСТІ ІНФОРМАЦІЇ  
ПРИ ВИКЛАДАННІ КОМП'ЮТЕРНИХ ДИСЦИПЛІН**

**В.В. Іванов**

**Поняття інформації.** Обчислювальна система базується і, одночасно, є основним інструментом *інформатики – наукової дисципліни, що вивчає методи та процеси створення, перетворення, зберігання, передачі інформації та використання її в різних галузях людської діяльності.*

*Інформація* (лат.: *informatio*) – відомості. Цього перекладу з латині разом з інтуїтивним розумінням суті інформації, як поняття, цілком достатньо на побутовому рівні.

Широке застосування терміну «інформація» в різних галузях людської діяльності обумовило і різні визначення відповідного поняття.

Приклад загального визначення поняття інформації: «*Відомості про навколишній світ і процеси, що протікають у ньому, сприймані людиною або спеціальним пристроєм*» (переклад відповідної статті тлумачного словника Ожегова).

Соціальне визначення поняття інформації (юриспруденція, журналістика тощо): «*Інформацією є документовані або публічно оголошені відомості про події та явища, що мали або мають місце у суспільстві, державі та навколишньому середовищі*» (Закон України «Про інформацію», Цивільний кодекс України).

Наведені і подібні їм визначення містять переважно семантичну суть поняття інформації і цілком задовольняють потреби відповідних сфер застосування у якості узагальнюючого синоніма терміна «відомості».

Кібернетика, теорія інформації, теорія зв'язку, генетика, інформаційні технології оперують кількісними категоріями і вимагають відповідного визначення поняття інформації, а саме:

*Інформація – це відомості, що існують на сигналах.*

**Сигнали і їх різновиди.** *Сигнал – це зміни певних властивостей матеріальних об'єктів чи процесів у часі чи просторі* (фізичне визначення).

З філософської точки зору інформація – це первинна категорія, що має абстрактну (відомості) і матеріальну (сигнали) суть. Відомості – це зміст, а сигнал – це форма. Тобто, *сигнал – це матеріальний носій нематеріальних відомостей* (логічне визначення).

Одні і ті ж відомості можуть існувати на різних сигналах в процесі їх перетворення у трьохелементній системі: «*джерело – канал – одержувач*» (наприклад, лектор – аудіоканал –

студент). При відсутності одного з елементів – відсутня система, а відтак і інформація. Інформація з'являється з появою потреби у ній. Потреба з'являється у одержувача, який через обраний чи створений канал шукає джерело і отримує сигнал, тобто інформацію. Неуважний студент не є елементом згаданої системи і в ній нема інформації бо вона не потрібна (нема одержувача).

Приклад інформації – знання. Нові знання генеруються (синтезуються) дослідниками в процесі аналізу і перетворення різноманітних сигналів від джерел, що складають оточуючий світ. Синтезовані знання зберігаються для нащадків в готовому вигляді на носіях інформації в процесі ще одного перетворення сигналів – кодування (клинорис, малюнки, письмо, креслення тощо).

Сигнали, а рівно, інформація можуть бути:

- аналоговими (неперервними – як графік) і дискретними (цифровими – як таблиця з числовими значеннями);
- часовими і просторовими;
- одно- і багатовимірними;
- різними за фізичною природою (механічними, електричними, електромагнітними, магнітними тощо).

**Перетворення сигналів.** *Предметом інформатики є інформаційні процеси, як процеси руху відомостей через перетворення сигналів.*

Наприклад, голос лектора (джерела інформації) – це аналоговий часовий одновимірний механічний сигнал – звук, що є сумішшю гармонічних поздовжніх хвильових коливань тиску повітря певної частоти, амплітуди і фази. Звукові хвилі через аудіоканал досягають мембрани мікрофона, де перетворюються у електричний сигнал (теж аналоговий часовий одновимірний), який після підсилення в електричному каналі перетворюється в аналоговий просторовий одновимірний сигнал (зміни намагніченості феромагнітного шару вздовж магнітної плівки магнітофона) або дискретний (цифровий) просторовий сигнал (файл на флеш-пам'яті цифрового диктофона).

Інформація в малюнку, фотографії зберігається на аналоговому просторовому двовимірному сигналі (зміни коефіцієнту відбиття на площині). Текст на паперовому аркуші (взагалі, будь-яке письмо: від клинорису до алфавітного) – це інформація на двовимірному просторовому дискретному сигналі. Скульптуру можна розглядати як тривимірний просторовий аналоговий сигнал.

При перетворенні аналогових сигналів відомості можуть втрачатися (копія фотографії або магнітофонного запису завжди гірше оригінала – втрачаються деталі).

При перетворенні аналогових сигналів у дискретні відомості кодуються відповідно до **мови**, що діє у системі джерело – канал – одержувач.

Мова має **алфавіт** і правила (лексичні, синтаксичні тощо).

*Дискретні сигнали несуть кодовану інформацію.*

**При перетворенні дискретних сигналів відомості не втрачаються** (копія будь-якого тексту, аудіо- або відеофайлу еквівалентна оригіналу).

Джерело повинно бути здатним зберігати або генерувати (синтезувати) інформацію мовою системи, канал – передавати (перетворювати), одержувач – сприймати і «розуміти» мову системи.

**Інформація як величина.** Подібно до інших первинних категорій (простір, час, енергія тощо) інформація є величиною. Тобто, можна говорити про кількість інформації, одиницю виміру інформації, швидкість передачі інформації тощо.

Поняття міри та кількості інформації пов'язані з поняттям невизначеності – **ентропії, як міри нестачі відомостей** (міри непередбачуваності кількості інформації, міри хаосу, міри безладу).

Наприклад, незадовго до референдуму з якогось питання проводиться попереднє опитування. Результати такого опитування не є заздалегідь відомими – вони відносно непередбачувані – ентропія перед опитуванням висока. Фактичне здійснення опитування та з'ясування його результатів дає деяку нову інформацію – ентропія після опитування зменшується. Незабаром після опитування проводиться референдум. Оскільки результати опитування вже є відомими, підсумки референдуму можна передбачити добре, і ці результати не повинні містити багато

нової інформації; ентропія результатів референдуму є низькою по відношенню до ентропії результатів попереднього опитування.

Узагальнений приклад: одержувачу необхідна інформація про систему  $\alpha$ , про яку він має деякі попередні (апріорні) відомості. Міра його необізнаності про систему є невизначеністю (ентропією)  $H(\alpha)$ . Після отримання деякого повідомлення  $\beta$  щодо системи  $\alpha$  необізнаність отримувача зменшилась так, що апостеріорна невизначеність  $H_\beta(\alpha)$  стала меншою апріорної

$$H_\beta(\alpha) < H(\alpha).$$

Тоді кількість інформації про систему  $\alpha$  у повідомленні  $\beta$  буде

$$I_\beta(\alpha) = H(\alpha) - H_\beta(\alpha).$$

**Інформація, як величина, є мірою зменшення невизначеності.**

**Кількість інформації.** При повній апостеріорній визначеності (тобто, апостеріорна невизначеність  $H_\beta(\alpha) = 0$ ) отримана інформація дорівнюватиме  $I_\beta(\alpha) = H(\alpha)$ , тобто **ентропія системи – це відсутня інформація**.

Якщо система  $\alpha$  апріорі може знаходитись в  $i$ -тому з  $N$  різних можливих станів з ймовірністю  $P_i$ , то кількість інформації у відомості про стан системи визначається **формулою Шеннона** (1948 рік)

$$I_\beta(\alpha) = H(\alpha) = - \sum_{i=1}^N P_i \log_2 P_i.$$

У випадку рівноймовірності можливих станів системи (підкидання монети, кидання симетричного шестигранного кубика, гра в рулетку, витягання гральної карти з колоди тощо)

$$P_i = \frac{1}{N}$$

формула Шеннона спрощується

$$I = - \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \log_2 \frac{1}{N} = \log_2 N.$$

Основа логарифму в формулі Шеннона, взагалі, може бути довільною. Але саме при основі 2 обчислена кількість інформації буде виражатися в **бітах** (англ.: *bit – binary digit*).

Щоб розібратися з одиницею кількості інформації розглянемо приклад з підкиданням «справедливої» монети, ймовірності випадання аверсу і реверсу якої однакові і дорівнюють 0,5 і немає жодного способу передбачити результат підкидання монети заздалегідь. Таке підкидання монети має один біт ентропії, оскільки є всього два можливі результати підкидання ( $N = 2$ ), які трапляються з однаковою ймовірністю, а для з'ясування фактичного результату потрібне лише одне підкидання. Відповідно, кількість інформації у повідомленні про результат підкидання, що сталося, теж дорівнює одному біту, бо повністю ліквідує невизначеність (зменшує ентропію до нуля):

$$H = I = \log_2 N = \log_2 2 = 1 \text{ біт}.$$

Одиниця виміру кількості інформації – **1 біт** – це кількість інформації, отримання якої зменшує кількість можливих рівно ймовірних станів системи вдвоє.

Бутерброд, який впав на підлогу і подібно монеті підскакує і перевертається, на відміну від монети, апріорі прилипає маслом до підлоги із ймовірністю більшою за 0,5, наприклад, 0,8. У цьому випадку ентропія і кількість інформації, що її ліквідує, будуть менше одного біта

$$I = -(0,2 \log_2 0,2 + 0,8 \log_2 0,8) \approx 0,722 \text{ біта.}$$

**Формула Хартлі.** Припустимо, є мова, з *розміром алфавітут* (розмір алфавіту – це кількість символів у ньому)

$$|A| = m .$$

Розмір алфавіту ще називають *потужністю алфавіту*.

Максимальна кількість різних  $n$ -символьних повідомлень з літер цього алфавіту

$$N = m^n .$$

Формула Хартлі визначає кількість інформації, що міститься в символному повідомленні довжиною  $n$  символів цього алфавіту

$$I = \log_2 N = \log_2 m^n = n \log_2 m .$$

Символьне повідомлення є текстом – проте тут розглядається не семантична (смілова) інформація, що міститься в тексті, а об'єм синтаксичної інформації, тобто кількість біт інформації, що міститься в текстовому повідомленні, записаному відомою кількістю символів алфавіту відомої потужності. Іншими словами, одержувач знає зміст кожного з можливих рівномірних повідомлень, не знає тільки – яке з них одержить.

Наприклад, алфавіт представлено двома символами: «0» і «1» (як алфавіт внутрішньої мови двійкового комп'ютера), довжина повідомлення – 3 символи, тобто  $m = 2$ ,  $n = 3$ .

При таких вихідних даних можна скласти  $N = m^n = 2^3 = 8$  різних повідомлень:

«000», «001», «010», «011», «100», «101», «110», «111».

Кількість інформації в кожному такому повідомленні – 3 біти, а в одному символі цього двосимвольного алфавіту – 1 біт. Наведені повідомлення можна інтерпретувати як символні зображення чисел у двійковій системі числення.

Аналогічно, в межах десяткової системи числення набір її цифр можна розглядати як алфавіт цифрової мови потужністю  $m = 10$ . Тобто кожна окрема цифра в десятковому числі несе синтаксичну кількість інформації

$$I = \log_2 m = \log_2 10 \cong 3,3219 \text{ біти.}$$

На практиці це означає, що запис певного числового значення в двійковій системі числення буде у середньому більш ніж втричі довшим його запису у десятковій системі. Дійсно:

$$555_{10} = 1000101011_2 - 3 \text{ десяткові цифри проти 10 двійкових,}$$

$$5555_{10} = 1101100100000011_2 - 5 \text{ десяткових цифр проти 16 двійкових.}$$

Вибір того чи іншого алфавіту обумовлюється зручністю, технічними можливостями реалізації і застосування та ефективністю в конкретних інформаційних системах:

- обчислювальна система – двійкова система числення;
- математика, фізика, хімія, технічні науки – національний алфавіт + десяткова система числення + спеціальні символи + знаки пунктуації;
- програмування – латиниця + вісімкова, десяткова та шістнадцяткова системи числення + спеціальні символи + знаки пунктуації;
- література – національний алфавіт + десяткова система числення + знаки пунктуації.

Загалом, чим більша потужність алфавіту мови (чим більша кількість рівномірних очікуваних подій) тим більше інформації несе в собі один символ (буква, цифра, знак пунктуації, спеціальний символ тощо) (Таблиця 1):



Таблиця 1

Синтаксична кількість інформації в одному символі алфавіту вживаних мов

Алфавіт (символи)	Розмір алфавіту	Синтаксична кількість інформації в одному символі, біт
Двійкова система числення (0, 1)	2	1
Вісімкова система числення (0 .. 7)	8	3
Десяткова система числення (0 .. 9)	10	3,3219
Шістнадцяткова система числення (0 .. 9, A .. F)	16	4
Латиниця у нижньому регістрі (a .. z)	26	4,7004
Латиниця у нижньому регістрі і десяткова система числення (a .. z, 0 .. 9)	36	5,1699
Повна латиниця (a .. z, A .. Z)	52	5,7004
Повна латиниця і десяткова система числення (a .. z, A .. Z, 0 .. 9)	62	5,9542
Стандартна 7-бітна кодова таблиця (без недрукованих символів)	95	6,5699

УДК 371.32.52

## ВИКОРИСТАННЯ ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ НА УРОКАХ ФІЗИКИ

С.І. Карпенко, Л.М. Кнорозок

*Не варто винаходити те,  
що не можна застосувати на практиці.  
Едісон*

Сучасний учитель, йдучи на урок, повинен володіти основами інформаційних технологій, мати уявлення про найбільш поширену в даний час операційну систему Windows, уміти працювати в поширених комп'ютерних програмах, зокрема, Microsoft Word, Excel, Power Point і низкою інших спеціалізованих програм, пов'язаних з предметною діяльністю, користуватися Інтернетом, а також уміти використовувати знання учнів про комп'ютер, котрі останні отримують на уроках інформатики.

Викладання фізики пов'язане з використанням великого обсягу різноманітної інформації, що робить застосування комп'ютерної техніки особливо ефективним, оскільки дозволяє дуже швидко опрацювати цю інформацію і представити її у вигляді таблиць, схем, діаграм, визначити залежність між різними об'єктами і явищами, будовою. Найдоцільнішим є використання комп'ютерних моделей для демонстрацій під час пояснення нового матеріалу чи розв'язування практичних задач. Наприклад, простіше, наочніше і краще показати за допомогою комп'ютерної моделі перехід електрона по енергетичних рівнях за моделлю Бора, ніж це робити на дошці за допомогою крейди. Завдяки комп'ютерним моделям вдається досягнути дуже

вагомих методичних результатів: підвищення інтересу до предмету, здобуваються глибші знання учнями, розвиваються їхні творчі здібності[2].

Ефективність навчання з використанням комп'ютерів пояснюється значним унаочненням програмного матеріалу, що дозволяє краще зрозуміти та засвоїти абстрактні поняття, сформувати практичні вміння та навички [3].

Напрямки використання інформаційних технологій при вивченні фізики можна розділити на кілька блоків:

- Демонстрація класичних дослідів, а також дослідів, які не можна відтворити у шкільних умовах;
- аналіз на комп'ютерних моделях дослідів з варіаціями початкових умов і параметрів;
- використання малюнків, моделей, схем, графіків як засобів віртуальних наочностей;
- проведення комп'ютерних лабораторних робіт;
- подання варіативних завдань різної складності для самостійної роботи з оцінкою результатів та аналізом помилок;
- проведення тестового контролю засвоєння нового матеріалу та підсумкового контролю знань з фіксацією результатів;
- проведення багаторівневих різнорівневих самостійних та контрольних робіт;
- побудова графіків, діаграм;
- розв'язування задач з наступною перевіркою результатів на комп'ютерних моделях;
- звернення до електронних енциклопедій, пошук навчальної інформації в Інтернеті.

Використання інформаційних технологій дозволяє учителю спілкуватися з учнями на сучасному технологічному рівні, робить навчальний процес більш привабливим, емоційним, ефективним та об'єктивним.

Використання ІКТ у викладанні фізики викликає та підтримує зацікавленість учнів у досконалому оволодінні предметом, досягає здобуття учнями стійких знань із предмета, встановлює міжпредметні зв'язки.

Поєднання традиційних методів та інформаційно-комунікаційних технологій дають вищий результат засвоєння матеріалу з фізики та його практичне застосування [4].

Проведення уроків при комплексному застосуванні традиційних та мультимедійних технологій забезпечує набуття учнями не тільки глибоких та міцних знань, а й вміння розвивати інтелектуальні, творчі здібності, самостійно набувати нових знань та працювати з різними джерелами інформації. Тому слід відзначити позитивні моменти використання мультимедійних засобів: яскраві образи надовго запам'ятовуються; відтворення фізичних процесів; керування відображеними на екрані моделями різних об'єктів, явищ, процесів; автоматичний контроль (самоконтроль) результатів навчальної діяльності, тестування.

Отже, інформаційно-комп'ютерні технології – це досить потужні механізми, які мають багато можливостей. Але вони не замінюють учителя, а можуть бути тільки інструментом у його руках, тому настав час озброїти вчителя новим інструментом і результат негайно позначиться на наступних поколіннях.

### Література

1. Використання інформаційних технологій на уроках фізики. //Бібліотека журналу Фізика в школах України. – Основа, 2007, 200ст.
2. Демонстраційний експеримент з фізики: Навчальний посібник / М.І. Ті Тут, В.Ю. Биков, В.П. Сергієнко та ін.; За ред. М.І. Шута, В.Ю. Бикова. К.: ВЦ "Просвіта", 2003. - 234 с.
3. Касперський А.В. Система формування знань з фізики у середній та вищій педагогічній школах. - К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2002. - 324 с.
4. Олексієнко Н. Л. Використання комп'ютерних технологій при викладанні фізики / Н. Л. Олексієнко [Електронний ресурс]. – Режим доступу: [http://osvita.ua/school/lessons\\_summary/physics/7471/](http://osvita.ua/school/lessons_summary/physics/7471/)

УДК 373.5.014.6(430)

## ДОСЯГНЕННЯ УКРАЇНСЬКИХ ВОСЬМИКЛАСНИКІВ У МАТЕМАТИЧНОМУ ТЕСТУВАННІ TIMSS-2011: ГЕНДЕРНИЙ АСПЕКТ

Ю.О. Ковальчук, Т.В. Лісова

**1. Структура математичного тесту.** Тестування з математики в дослідженні TIMSS базується на спільно розробленій країнами-учасницями комплексній методиці вимірювання якості двох аспектів навчальних досягнень:

- **предметний вимір** – вимірювання рівня засвоєння змісту навчальної програми з математики;
- **когнітивний вимір** – вимірювання сформованості вмінь здійснювати когнітивні дії й операції в процесі розв'язування математичних задач.

З урахуванням широкого кола охоплених дослідженням цілей було використано 217 завдань із математики для учнів 8 класу. При цьому близько половини завдань мали форму множинного вибору, інша половина – задачі відкритого типу, у яких учні пишуть свої власні відповіді. Задачі розподілялися за предметним та когнітивним вимірами у таких співвідношеннях (таблиця 1):

Таблиця 1. Розподіл задач тесту з математики для 8 класу за предметним та когнітивним вимірами



Усі завдання були розподілені на 14 блоків (позначених як M01-M14), які в свою чергу були розподілені у зошити, причому застосовувався так званий спіральний дизайн розподілу блоків: кожен зошит містив один блок з попереднього зошита та один новий. Так, перший зошит містив блоки M01 та M02, другий зошит – блоки M02 та M03, і так далі; останній, чотирнадцятий зошит, містив блоки M14 і M01. Це дозволяло з більшою вірогідністю порівнювати результати учнів, які виконували різні завдання. Кожен учень виконував завдання одного зошита. Хоча кожен блок містить різну кількість завдань, блоки загалом були збалансовані за складністю. Кожен блок виконувався учнями, які отримували зошити з відповідними суміжними номерами. Кожне з завдань тесту виконували від 474 до 488 українських восьмикласників.

Результати тестування вимірювалися за шкалою досягнень TIMSS у діапазоні від 0 до 1000 балів, хоча успішність учнів зазвичай знаходиться в діапазоні від 300 до 700 балів. TIMSS використовує середину шкали (500 балів) у якості точки відліку, яка залишається незмінною впродовж усіх років існування дослідження.

**2. Загальні результати України.** За результатами участі у математичному тесті TIMSS 2011 року українські восьмикласники отримали середній бал 479, що є нижчим від середнього міжнародного рівня на 21 бал. Враховуючи той факт, що розподіл балів усіх учасників є нормалізованим із середнім 500 та стандартним відхиленням 100, середньостатистичний український восьмикласник отримав 42-й процентильний ранг (приблизно 42 відсотки учасників тестування з усіх країн та окремих регіонів отримали такий же або гірший результат).

Цей показник є вищим на 17 балів за середній бал восьмикласників України у TIMSS 2007 року.

У таблиці 2 наведено результати України серед інших країн з близькими за рейтингом місцями (тут і далі в таблицях в дужках вказані стандартні похибки вимірювання).

Таблиця 2. Результати України серед країн із схожими показниками успішності восьмикласників з математики

Литва	502 (2,5)
<b>Середнє за шкалою TIMSS</b>	<b>500</b>
Італія	498 (2,4)
Нова Зеландія	488 (5,5)
Казахстан	487 (4,0)
Швеція	484 (1,9)
<b>Україна</b>	<b>479 (3,9)</b>
Норвегія	475 (2,4)
Вірменія	467 (2,7)
Румунія	458 (4,0)
ОАЕ	456 (2,1)
Туреччина	452 (3,9)

Розподіл українських учасників тестування за міжнародними рівнями досягнень наведено у таблиці 3.

Таблиця 3. Кількість українських восьмикласників (у відсотках), за міжнародними рівнями досягнень

Найвищий рівень (625)	Високий рівень (550)	Середній рівень (475)	Низький рівень (400)
5	22	53	81

Як бачимо, 19% українських учасників не досягли навіть низького міжнародного рівня, тобто отримали менше ніж 400 балів. Для порівняння: майже половина (49%) учасників з Тайваню, який посідає третє місце у рейтингу країн-учасниць, досягли найвищого рівня, і 96% – низького рівня.

Опис міжнародних рівнів наведено у таблиці 4.

Таблиця 4 Міжнародні рівні досягнень TIMSS-2011 із математики

Бали	Найвищий міжнародний рівень
625	Учні можуть працювати з інформацією, робити висновки, робити узагальнення й розв'язувати лінійні рівняння. Учні можуть розв'язувати різні задачі з використанням дробів, пропорцій і відсотків й обґрунтувати свої висновки. Учні можуть виражати узагальнення алгебраїчно й моделювати ситуації. Вони можуть розв'язувати найрізноманітніші завдання, пов'язані з рівняннями, виразами й функціями. Учні можуть використовувати поняття і властивості геометричних фігур для розв'язування задач. Учні можуть використовувати в міркуваннях дані з кількох джерел або незнайомих представлень даних для розв'язування багатокрокових задач.

**Високий міжнародний рівень**

550

Учні можуть застосувати свої розуміння й знання в різних відносно складних ситуаціях. Учні можуть залучати інформацію з кількох джерел для розв'язування задач, використовуючи різні типи чисел й операцій над ними. Учні можуть зіставляти й порівнювати один з одним звичайні й десяткові дроби, а також відсотки. Учні на цьому рівні демонструють знання основних операцій з алгебраїчними виразами. Вони можуть використовувати властивості прямих, кутів, трикутників, прямокутників і прямих призм для розв'язання задач. Вони можуть аналізувати дані різних графіків.

**Середній міжнародний рівень**

475

Учні можуть застосовувати базові математичні знання в різних ситуаціях. Учні можуть розв'язувати задачі з використанням звичайних і десяткових дробів, пропорцій та відсотків. Вони розуміють прості алгебраїчні відношення. Учні можуть співвідносити двовимірні зображення з тривимірними об'єктами. Вони можуть читати, інтерпретувати й будувати графіки і таблиці. Вони розуміють основні поняття стохастики.

**Низький міжнародний рівень**

400

Учні мають певні знання про цілі числа і десяткові дроби й операцій над ними та знання про основні графіки.

Таким чином, 18% українських восьмикласників не продемонстрували певних знань про цілі числа та десяткові дроби і уміння виконувати дії з ними, а також знання про основні графіки. Втім, у порівнянні з результатами TIMSS 2007 року, Україна показала поліпшення результатів за всіма чотирма рівнями.

2.1. *Результати України за тематичним виміром.* У таблиці 5 наведено результати українських восьмикласників у порівнянні з загальними міжнародними результатами за темами завдань тесту з математики.

Таблиця 5. Результати українських учнів за темами завдань

Тема	Середній бал	Різниця між загальним середнім (479) балом з математики
Числа	472 (4.1)	-7 (1.8)
Алгебра	487 (4.4)	8 (1.6)
Геометрія	476 (4.3)	-3 (1.6)
Статистика та ймовірність	471 (4.0)	-8 (2.2)

Як бачимо, лише з однієї теми – алгебри, українські восьмикласники отримали результати, що перевищують загальний середній бал України на 8 балів. З інших тем результати нижчі. Найнижчий результат отримано за завдання з теми Статистика та ймовірність, що частково можна пояснити тим фактом, що у 8 класі на 2011 рік учні ще не приступали до систематичного вивчення елементів теорії ймовірностей, хоча й були ознайомлені з основами представлення даних у вигляді графіків та діаграм. З іншого боку, українські школярі дали не нижчий відсоток правильних відповідей на задачі з цієї теми, ніж загалом по всіх країнах (таблиця 6).

Для восьмикласників на середньому міжнародному рівні на предметному рівні найважчою виявилась алгебра, за нею йдуть геометрія, потім числа, а найлегшими виявились завдання з статистики та ймовірності. У такому ж порядку за складністю розташовуються теми і для українських школярів.

Таблиця 6. Відсотки правильних відповідей за темами завдань

	Математика загалом	Числа	Алгебра	Геометрія	Статистика та ймовірність
Україна	42 (0.9)	43 (1.0)	39 (1.0)	41 (1.0)	45 (0.8)
Міжнародне середнє	41 (0.1)	43 (0.1)	37 (0.1)	39 (0.1)	45 (0.1)

У порівнянні з результатами TIMSS 2007 року, Україна значимо підвищила досягнення в усіх змістових лініях: алгебра – плюс 23 бали, числа – 14 балів, геометрія – 11 балів, статистика та ймовірність – 22 бали.

2.2. *Результати України за когнітивним виміром.* Загалом для всіх учасників тестування завдання за трьома компонентами когнітивного аспекту мали різні рівні складності. Результати України за когнітивними доменами наведено у таблиці 7.

Таблиця 7. Досягнення України на компонентах когнітивного рівня

Знання		Застосування		Міркування	
Середній бал	Відмінність від загального середнього	Середній бал	Відмінність від загального середнього	Середній бал	Відмінність від загального середнього
481 (4.4)	2 (1.7)	480 (4.3)	1 (1.8)	467 (4.2)	-12 (1.8)

Як бачимо, основною проблемою українських школярів є міркування, тоді як завдання на знання та застосування вони розв'язують дещо краще. Втім, подібні результати спостерігають-ся й для більшості інших країн.

На міжнародному рівні середній відсоток правильних відповідей за когнітивним рівнем становить 49 відсотків з предметних знань, 39 відсотків із застосування й 30 відсотків із міркувань у восьмому класі. Однак, як і за предметним рівнем, IRT-шкала дозволяє розмістити досягнення учасників трьох компонентів когнітивного рівня з урахуванням складності завдань, а також надає можливість кожному учаснику TIMSS-2011 порівняти результати досягнень когнітивного рівня із загальними досягненнями з математики (Таблиця 8).

Таблиця 8. Відсотки правильних відповідей за компонентами когнітивного рівня

	Математика загалом	Знання	Застосування	Міркування
Україна	42 (0.9)	52 (1.0)	41 (0.9)	29 (0.8)
Міжнародне середнє	41 (0.1)	49 (0.1)	39 (0.1)	30 (0.1)

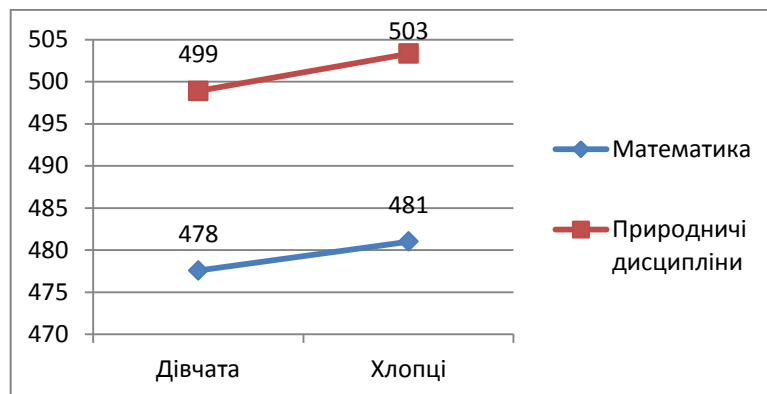
Як видно з таблиці, за відсотками розв'язаних задач у різних когнітивних доменах Україна мало відрізняється від середнього міжнародного рівня.

У порівнянні з 2007 роком, Україна значимо додала за всіма когнітивними рівнями: знання – плюс 14 балів, застосування – 18 балів, міркування – 27 балів. Як бачимо, найбільшого прогресу досягнуто у найбільш складному когнітивному домені (міркування), тоді як у найбільш простому (знання) прогрес є найменшим.

**3. Гендерний аспект.** За обома вимірами – тематичним та когнітивним, спостерігається певна різниця за статтю учасників тестування.

У тестуванні брали участь 1722 хлопців та 1653 дівчат.

Загалом, за середнім балом за весь тест, хлопці дещо випередили дівчат як з математики, так і з природничих дисциплін (діаграма 1).



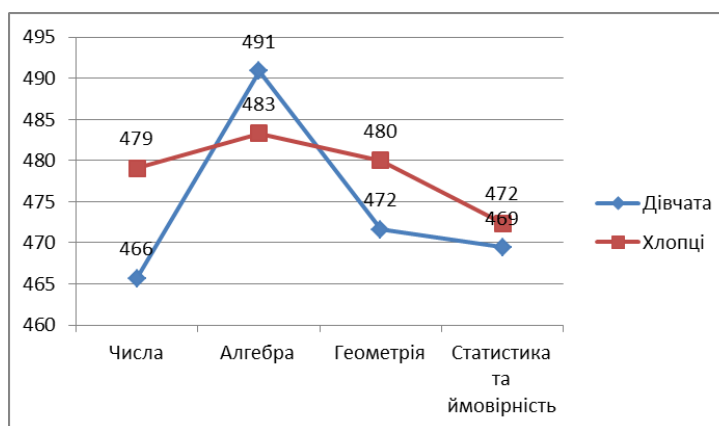
Діаграма 1. Загальні результати українських хлопців та дівчат у TIMSS-2011

У таблиці 9 наведено результати окремо для хлопців та дівчат за змістовими та когнітивними доменами. Ці ж результати зображено у вигляді діаграм 2 і 3.

Таблиця 9. Середні бали за статтю та змістовими і когнітивними доменами

Змінна	Дівчата	Ст. похибка	Хлопці	Ст. похибка
Математика	478	3.98	481	4.88
Числа	466	4.08	479	5.18
Алгебра	491	4.41	483	5.61
Геометрія	472	4.55	480	5.96
Статистика та ймовірність	469	4.50	472	5.04
Знання	482	4.66	480	5.57
Застосування	474	4.79	487	5.13
Міркування	466	4.23	469	5.64

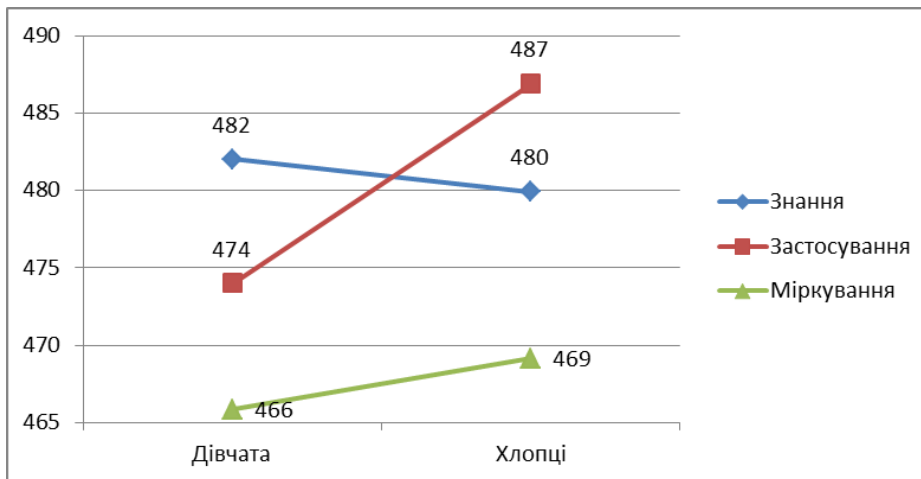
В цілому хлопці отримали в середньому на три бали вище (481 проти 478 балів) ніж дівчата, хоча ця відмінність потрапляє у межі стандартних похибок вимірювання.



Діаграма 2. Досягнення за статтю та тематикою завдань

Як видно з таблиці 9 (та діаграми 2), дівчата продемонстрували істотно кращі результати з алгебри, а хлопці – з чисел та геометрії. Для задач на статистику і ймовірність різниця неістотна.

Для порівняння: у міжнародному розрізі, хлопці значимо переважають дівчат у числах, в трьох інших темах переважають дівчата.



Діаграма 3. Досягнення за статтю та когнітивними доменами

Хлопці переважають дівчат за застосуванням та міркуванням, тоді як дівчата переважають за знаннями (діаграма 3).

Для порівняння: у міжнародному вимірі, хлопці значимо переважають дівчат у міркуванні, у двох інших доменах значимої відмінності немає.

Ми також проаналізували відмінності між хлопцями та дівчатами у їх відповідях на анкету, запитання якої стосувалося тем, пов'язаних із навчанням. Для цього ми використали алгоритми машинного аналізу даних з навчанням (Data Mining), за допомогою яких отримали моделі даних у вигляді правил та дерев рішень.

Data Mining – це спосіб навчити машину, як виявити закономірності у вихідних даних. Спочатку комп'ютер будує модель, засновану на повних даних про об'єкти (так званій навчальній вибірці). Ця модель може бути використаною в подальшому для пояснення або прогнозування. Детальний опис методів і алгоритмів інтелектуального аналізу даних, а також програмне забезпечення WEKA, який ми використовували для аналізу, можна знайти у [3]. Досить повний огляд досліджень в області освітніх Data Mining можна знайти в статті [2]. Основним завданням інтелектуального аналізу даних є побудова класифікаторів. Наприклад, ми можемо побудувати модель, щоб визначити, до якого класу – хлопець чи дівчина, належить особа, якщо відомі її відповіді на деякі з питань анкети. Зазвичай побудована модель має вигляд множини правил виду «Якщо ... то ...», або так званих дерев рішень (повних чи частинних), або навіть у вигляді математичної формули. Дерево рішень є графом, який у вигляді розгалужень ілюструє всі можливі результати рішення. Якщо рішення (корінь дерева) є стать людини, а листи дерева є її атрибутами, то рух вздовж гілок дерева від листка до кореня допомагає зрозуміти, для яких наборів атрибутів різниця між хлопцями і дівчатами є найбільшою. Основною характеристикою точності передбачення правил або дерев рішень є число осіб, яке правильно ідентифікується даною моделлю, виражене як частка всіх осіб, до яких вона застосовується. Для отримання моделей нами було використане аналітичне середовище WEKA.

Спочатку була проведена певна підготовча робота. Множина із 68 потенційно чутливих до статі респондентів запитань анкети (які у нашому випадку відіграють роль атрибутів об'єктів) була визначена для подальшого аналізу. Далі ця множина була звужена до 17 таких, які найкраще передбачають гендерний клас особи. Для цього використовувався інструмент «вибір атрибутів» програми WEKA. Це дозволило нам отримати більш прості для розуміння та інтерпретації моделі.

Відповіді учнів на ці запитання анкети були далі використані для навчання машинних класифікаторів, щоб отримати структури даних у вигляді правил та дерев рішень.

Спочатку був використаний простий (проте зазвичай ефективний) алгоритм 1R («одне правило»). Цей алгоритм дозволив виявити ту єдину змінну-атрибут, яка дозволяє найкраще класифікувати респондента за статтю. Таким атрибутом виявилася відповідь на запитання «Як часто ви розмовляєте про шкільні справи з батьками?». У вікні виведення WEKA це виглядало так (таблиця 10):



Таблиця 10. Результат роботи алгоритму IR

Як часто ви розмовляєте про шкільні справи з батьками?:		
Ніколи або майже ніколи		->Хлопець
Щоденно або майже щоденно		->Дівчина
Один раз або двічі на тиждень		->Хлопець
Один раз або двічі на місяць		->Хлопець
Пропущено або не валідно		->Хлопець
(2013/3375 instances correct)		
Correctly classified instances	2013	59.6444 %
Incorrectly classified instances	1362	40.3556 %

Втім, як видно з таблиці, лише близько 60% респондентів навчальної вибірки можна класифікувати за статтю правильно по відповіді на це запитання анкети. Це означає, що й усі інші запитання анкети не дозволять це зробити з більшою точністю, тобто яскравих відмінностей між хлопцями та дівчатами знайти за результатами анкети не вдасться.

Дерево рішень, отримане за результатом роботи алгоритму J48 (модифікацією відомого алгоритму C4.5), має вигляд (таблиця 11):

Таблиця 11. Дерево рішень за алгоритмом J48

Як часто ви розмовляєте про шкільні справи з батьками? = Ніколи або майже ніколи: Хлопець(137.0/48.0)
Як часто ви розмовляєте про шкільні справи з батьками? = Щодня або майже щодня
Хотів би в майбутньому мати роботу, пов'язану з фізикою= Не погоджуюсь: Дівчина (1283.0/447.0)
Хотів би в майбутньому мати роботу, пов'язану з фізикою = Погоджуюсь: Хлопець (625.0/303.0)
Хотів би в майбутньому мати роботу, пов'язану з фізикою = Пропущено або не валідно: Хлопець (17.0/4.0)
Хотів би в майбутньому мати роботу, пов'язану з фізикою = Логічно неправильно: Хлопець (3.0/1.0)
Як часто ви розмовляєте про шкільні справи з батьками? = Раз або двічі на тиждень
Хотів би в майбутньому мати роботу, пов'язану з фізикою = Не погоджуюсь
Відношення до вивчення біології = Подобається вивчати: Дівчина (302.0/142.0)
Відношення до вивчення біології = Трохи подобається вивчати: Хлопець (300.0/144.0)
Відношення до вивчення біології = Не подобається вивчати: Хлопець (88.0/25.0)
Відношення до вивчення біології = Логічно неможливо визначити: Хлопець (3.0/1.0)
Відношення до вивчення біології = Пропущено або не валідно: Хлопець (2.0)
Хотів би в майбутньому мати роботу, пов'язану з фізикою = Погоджуюсь: Хлопець (326.0/86.0)
Хотів би в майбутньому мати роботу, пов'язану з фізикою = Пропущено або не валідно: Хлопець (16.0/5.0)
Хотів би в майбутньому мати роботу, пов'язану з фізикою = Логічно неможливо визначити: Хлопець (2.0)
Як часто ви розмовляєте про шкільні справи з батьками? = Раз або двічі на місяць: Хлопець (234.0/100.0)
Як часто ви розмовляєте про шкільні справи з батьками? = Пропущено або не валідно: Хлопець (37.0/9.0)

Для отримання дерева рішень у такому компактному вигляді на роботу алгоритму було покладене обмеження щодо мінімальної кількості об'єктів у кожному листку дерева. Як бачимо, наступними змінними, характерними для визначення статі респондента, є пов'язування майбутньої роботи з фізикою, а також ставлення до вивчення біології. Цікаво також відзначити, що хлопці більш схильні не відповідати на подібні запитання зовсім, або відповідати неоднозначно.

Крім того, три підмножини атрибутів були проаналізовані відповідно до трьох аспектів: (1) ставлення учнів до навчання і шкільних предметів; (2) стосунки з батьками; (3) речі, які траплялися з учнями в школі.

Було встановлено, що найкращий прогноз щодо гендерного класу дають відповіді на питання 11.В анкети: найчастіше дівчата говорять про шкільних заняттях зі своїми батьками щодня або майже щодня, в той час як хлопчики роблять це рідше. Близько 60% українських 8-класників класифікуються правильно за цим правилом. Важливо пам'ятати, що запитання анкети стосувалися досягнення учнів з математики та природничих наук.

Алгоритм побудови частинних дерев рішень продукував набір з 14 основних моделей, які описують гендерні класи більш точно (понад 62% правильно класифікованих учнів).

Наприклад, якщо особа говорить про шкільні справи з батьками один або два рази на тиждень, і хотіла б мати у майбутньому роботу, пов'язану з фізикою, то вона, ймовірно, є хлопцем. 326 учнів відповіли таким чином, і 86 з них були класифіковані за цим частинним деревом неправильно.

Запитання анкети щодо ставлення учнів до навчання і шкільних предметів продукує моделі, які виглядають наступним чином: хлопчики хотіли б роботу, яка включає в себе використання фізики; хлопчики визнають цінність навчання математики; дівчата визнають цінність вивчення біології і хотіли б роботу, пов'язану з використанням біології; дівчата не цінують вивчення фізики і в деякій мірі цінують вивчення математики. Головною відмінністю є ставлення до твердження «хотів би у майбутньому мати роботу, пов'язану з використанням фізики».

Підмножини атрибутів за іншими двома аспектами продукують моделі: «Я часто розмовляю про шкільні справи з батьками» (2); «Інші учні часто не запрошували мене до спільних ігор» (3). Також були отримані більш складні моделі по кожному з цих аспектів.

Прогностичну потужність кожної з отриманих моделей було обчислено та відповідним чином інтерпретовано.

### Література

1. Baye, A., & Monseur, C. (2016). Gender differences in variability and extreme scores in an international context. *Large-scale Assessments in Education*, 4 (1); 1-16.
2. Romero, C., & Ventura, S. (2010). Educational data mining: a review of the state of the art. *IEEE Transactions on Systems, Man, And Cybernetics – Part C: Applications And Reviews*, 40 (6); 601-618.
3. Witten I. H., Eibe, F., & Hall, M. A. (2011). *Data Mining: practical machine learning tools and techniques (3rd ed.)*. Burlington, MA: The Morgan Kaufmann series in data management systems.

УДК 331.45

## ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ ДИСЦИПЛІНИ «ОСНОВИ ОХОРОНИ ПРАЦІ» НА ПЕРШОМУ КУРСІ

М.П. Руденко

Сучасна життєдіяльність людей у всіх проявах – соціальному, політичному, технічному, економічному, військовому – не гарантує виживання людини як біологічного виду. Комплекс проблем безпеки розширився, став більше взаємопов'язаним і набув якісно нового характеру через виникнення нової і безперервної загрози існуванню всього людства від власної життєдіяльності. Фактично, загроза катастрофи в глобальному масштабі стала постійною. Тому дії кожної особистості і життєдіяльність людських спільнот будь-яких рівнів повинні постійно задовольняти вимогам глобальної безпеки. Для цього потрібно повсюдно впроваджувати нові світогляд, систему ідеалів і цінностей, формувати якості особистості безпечного типу, створювати суспільство і державу, а, зрештою, і світову спільноту безпечного типу. Перехід на стійкий шлях розвитку суспільства неможливий без урахування і, за необхідності, трансформації світогляду кожної людини в напрямку підвищення її відповідальності за майбутнє наступних поколінь. Найважливішою складовою цього процесу є формування культури безпеки життєдіяльності, яке має реалізовуватися з раннього дитинства і удосконалюватися протягом всього життя людини.

Формування компетенції, системи знань, умінь і навичок безпечної життєдіяльності та переконаності в їх істинності здійснюється і в сім'ї, і в освітніх установах усіх рівнів, але найбільш інтенсивно – під час опанування дисциплін напрямку безпечної життєдіяльності у ВНЗ. Система таких знань обґрунтовується вченими-методистами, реалізується у вигляді навчальних програм, підручників, методичних посібників.

У свій час були розроблені та впроваджені для вивчення у вищих навчальних закладах програми із дисциплін “Безпека життєдіяльності”, “Цивільний захист”, “Основи охорони праці” та “Охорона праці в галузі” [1, 2, 3, 4], які були спрямовані на комплексну реалізацію розв’язання проблеми формування у випускників вузів культури безпеки життєдіяльності. Вивчення цих дисциплін передбачається рядом чинних законодавчих актів [5, 6, 7, 8, 9]. Але склалося так, що в навчальних планах нашого вузу передбачається вивчення лише дисципліни “Основи охорони праці” на першому курсі (програма передбачала вивчення цієї дисципліни на четвертому курсі, оскільки “Основи охорони праці” є комплексною дисципліною, що базується на теоретичних положеннях природничих та суспільних наук.). Такий підхід створює ряд незручностей та складностей при вивченні цього предмета.

По-перше, безпека життєдіяльності та основи охорони праці мають спільну термінологію, яка засвоювалася студентами на першому курсі в процесі вивчення безпеки життєдіяльності.

По-друге, при вивченні основ охорони праці розглядається трудове законодавство України, що є складним для першокурсників.

По-третє, у студентів-першокурсників гуманітарних спеціальностей викликає складність виконання лабораторних робіт.

По-четверте, складно організувати виконання лабораторних робіт, коли в одній підгрупі понад 30 студентів.

По-п’яте, значний обсяг навчального матеріалу виноситься на самостійне опрацювання студентів.

Враховуючи усі ці складності, викладачами нашої кафедри на основі типової програми навчальної дисципліни “Основи охорони праці” розроблені тематика лекційних, семінарських та лабораторних робіт. Кількість лекційних занять скоротилася із 9 до 6, а кількість семінарських та лабораторних занять залишилася сталою (4 та 5 відповідно). При цьому ряд питань лекцій виносяться на самостійне опрацювання (у переліку питань вони позначені \*), а їх засвоєння перевіряється на семінарських заняттях. Передбачається також виконання студентами індивідуального науково-дослідного завдання у вигляді реферату.

Нижче наводимо запропоновану нами тематику лекцій та питань, що на них розглядаються.

### **Лекція 1**

#### **Правові та організаційні основи охорони праці**

##### **План:**

1. Сучасний стан охорони праці в Україні та за кордоном.
2. Основні терміни та визначення в галузі охорони праці.\*
3. Класифікація шкідливих та небезпечних виробничих факторів.\*
4. Законодавство України в галузі охорони праці.
5. Принципи державної політики в галузі охорони праці.\*
6. Застосування міжнародних договорів та угод.
7. Нормативно-правові акти та документи підприємств з охорони праці.
8. Права працівників на пільги та компенсації за важкі та шкідливі умови праці.

### **Лекція 2**

#### **Державне управління охороною праці, державний нагляд і громадський контроль за охороною праці**

##### **План:**

1. Система державного управління охороною праці в Україні.
2. Органи державного нагляду за охороною праці, їх основні повноваження і права.
3. Громадський контроль за дотриманням законодавства про охорону праці.

### **Лекція 3**

#### **Організація охорони праці на підприємстві та навчання з питань охорони праці**

**План:**

1. Структура, основні функції і завдання управління охороною праці в організації.
2. Служба охорони праці підприємства.
3. Комісія з питань охорони праці підприємства.
4. Атестація робочих місць за умовами праці\*.
5. Стимулювання охорони праці\*.
6. Принципи організації та види навчання з питань охорони праці\*.
7. Інструктажі з питань охорони праці.

**Лекція 4****Профілактика травматизму та професійних захворювань****План:**

1. Виробничі травми, професійні захворювання, нещасні випадки виробничого характеру.
2. Основні причини виробничих травм і професійних захворювань.
3. Основні заходи із запобігання травматизму та професійним захворюванням.

**Лекція 5****Основи фізіології та гігієни праці****План:**

1. Повітря робочої зони\*.
2. Освітлення виробничих приміщень\*.
3. Вібрація.
4. Шум, ультразвук та інфразвук.
5. Електромагнітні поля та випромінювання радіочастотного діапазону.
6. Випромінювання ГЧ та УФ діапазону.
7. Іонізуюче випромінювання.
8. Санітарно-гігієнічні вимоги до планування і розміщення виробничих і допоміжних приміщень\*.

**Лекція 6****Основи виробничої безпеки та пожежна профілактика****План:**

1. Загальні вимоги безпеки\*.
2. Електробезпека.
3. Показники вибухопожежонебезпечних властивостей матеріалів і речовин\*.
4. Категорії приміщень за вибухопожежонебезпечністю.
5. Класифікація вибухонебезпечних та пожежонебезпечних приміщень і зон.
6. Система попередження вибухів і пожеж.
7. Навчання з питань пожежної безпеки\*.

Така компоновка питань лекційних занять дає можливість у межах виділеного часу реалізувати типову програму дисципліни, одночасно збільшивши обсяг матеріалу, що виноситься на самостійне опрацювання.

Крім того, викладачами кафедри підготовлено до друку навчальний посібник із основ охорони праці для студентів-першокурсників. Цей посібник містить розширений конспект лекцій даного курсу, тематику семінарських занять та інструкції до 9 лабораторних робіт. У посібнику, враховуючи той факт, що студенти не вивчають “Безпеку життєдіяльності”, а отже, не володіють відповідною термінологією, значна увага приділяється розгляду термінів, які використовуються при вивченні основ охорони праці. Приділено також увагу розгляду основних законів України про працю. Питання, що виносяться на самостійне опрацювання, висвітлені в розширеному вигляді. Тому студенти, працюючи з даним посібником, можуть детально засвоїти матеріал даних питань. Наявність інструкцій до 9 лабораторних робіт (із 5 необхідних) дає можливість викладачу при підготовці та виконанні лабораторних робіт враховувати спеціальність студентів та рівень їх підготовки.

Запропоновані нами підходи до організації та проведення вивчення дисципліни “Основи охорони праці” на першому курсі будуть сприяти глибшому та якіснішому засвоєнню навчального матеріалу.

### Література

1. Типова навчальна програма нормативної дисципліни “Безпека життєдіяльності” для вищих навчальних закладів / Запорожець О.І. та ін. – К., 2011. – 22 с.
2. Типова навчальна програма нормативної дисципліни “Основи охорони праці” для вищих навчальних закладів / Ткачук К.Н. та ін. – К., 2011. – 15 с.
3. Типова навчальна програма нормативної дисципліни “Цивільний захист” для вищих навчальних закладів / Запорожець О.І. та ін. – К., 2011. – 23 с.
4. Типова навчальна програма нормативної дисципліни “Охорона праці в галузі” для вищих навчальних закладів / Запорожець О.І. та ін. – К., 2011. – 15 с.
5. Кодекс Цивільного захисту України (Відомості Верховної Ради, 2013, № 34-35, ст. 458).
6. Закон України “Про охорону праці” (Відомості Верховної Ради України, 1992, № 49, ст. 668).
7. Постанова Кабінету Міністрів України від 26 червня 2013 р. № 444 “Про затвердження Порядку здійснення навчання населення діям у надзвичайних ситуаціях”.
8. Постанова Кабінету Міністрів України від 9.01.2014 “Про затвердження Положення про єдину державну систему цивільного захисту”.
9. НПАОП 0.00-4.12-05 “Типове положення про порядок проведення навчання і перевірки знань з питань охорони праці”.

УДК371.32: 004

## ДО ПРОБЛЕМИ ВИВЧЕННЯ ОСНОВНИХ ПОНЯТЬ ТЕОРІЇ ГРАФІВ ПРИ ПІДГОТОВЦІ УЧНІВ ДО ОЛІМПІАД З ІНФОРМАТИКИ

В.М. Харченко

ІТ галузь стає пріоритетною в розвитку України – вона стала третьою за обсягом експорту галуззю економіки. Олімпіади з інформатики покликані виявити здібних до програмування дітей та зацікавити учнів загальноосвітніх шкіл до вивчення програмування. Практично кожна олімпіада III та IV етапу містить одну а то й кілька задач, в яких потрібно використати знання з теорії графів. Оскільки дана теорія вивчається в класах з профільним рівнем вивчення інформатики [3], то для учнів, які вивчають інформатику менш повно, учителям доводиться вивчати на факультативних чи гурткових заняттях. При вивченні основних понять теорії графів теоретичний матеріал учитель може взяти з [1; 2; 4; 5]. Теоретичні питання, з врахуванням віку учнів, більш детально розглянуто на основі конкретних математичних задач в [4], а подання їх у вигляді алгоритмів – в [6]. Проте, при вивченні основних понять теорії графів та способів подання графів, учителям бракуватиме набору задач з фабулою, які зустрічаються на олімпіадах. Так на ресурсі [6] з більш ніж 7800 задач є лише 4 на основні поняття теорії графів.

Мета даної статті запропонувати методичну систему задач, яку вчитель зможе використати для закріплення вмінь, знань та навичок з даної теми. Даний підбір задач буде доречний тим учителям інформатики, хто готує учнів до II та III етапів Всеукраїнської олімпіади з інформатики.

При вивченні основних понять графа учителям інформатики слід пам’ятати, що така математична структура як граф використовується для задання певних відношень між множиною об’єктів. Оскільки у фабульних задачах не вказується який тип графів слід вибирати, то слід навести приклади використання неорієнтованих і орієнтованих графів для задання відповідних відношень. Зокрема, у таблиці 1 наведені приклади відношень, які доречно подавати у вигляді

неорієнтованого графа, а в таблиці 2 – відношення, які доречно подавати у вигляді орієнтованого графа.

Таблиця 1

Граф	Вершини	Ребра
Лабіринт	Розгалуження і тупики	Переходи
Метро	Станції	Пересадки
Сім'я	Люди	Родинні зв'язки

Таблиця 2

Орієнтовний граф	Вершини	Дуги
Будівництво	Роботи	Необхідне передування робіт
Лабіринт	Розгалуження і тупики	Переходи
Метро	Станції	Пересадки

Після теоретичного вивчення понять "вершина", "ребро", "ступінь вершини", "матриця суміжності", "матриця інцедентності" та "список суміжності" графа можна закріпити їх розв'язанням задач 4760 – 4767 з [6]. А після цього запропонувати наступні задачі.

**Задача "Дбаємо про тварин".** Активісти товариства захисту тварин міста  $N$ -ська вирішили впровадити австралійський досвід по збереженню тварин. Їм вдалося знайти підтримку в мерії щодо побудови підземних переходів для звірів. Оскільки найбільше бродячих псів і котів в місті гине на перехрестях доріг, то вони запропонували будувати такі переходи на кожній дорозі перед кожним перехрестям. У місті є  $M$  доріг і  $N$  перехресть. На всіх дорогах рух є двостороннім. Напишіть програму, яка порахує, скільки підземних переходів повинно бути побудовано біля кожного перехрестя. Перехрестя пронумеровані числами від  $1$  до  $N$ .

**Вхідні дані.** У першому рядку вхідного текстового файлу "TRANSIT.DAT" записано два числа  $N$  і  $M$  ( $0 < N \leq 100$ ,  $0 \leq M \leq \frac{N \cdot (N-1)}{2}$ ). У наступних  $M$  рядках записано по два числа  $i$  та  $j$  ( $1 \leq i, j \leq N$ ), які означають, що перехрестя  $i$  та  $j$  з'єднані дорогою.

**Вихідні дані.** У вихідний текстовий файл "TRANSIT.SOL" вивести  $N$  чисел:  $k$ -те число означає кількість підземних переходів біля  $k$ -ого перехрестя.

*Примітка:* Слід пам'ятати, що довільні два перехрестя з'єднані не більше, ніж однією дорогою. Немає доріг від перехрестя  $i$  до самого себе.

Наприклад:

TRANSIT.DAT	TRANSIT.SOL
4 5	2 3 3 2
1 2	
2 3	
3 1	
4 2	
4 3	

## Розв'язання

Перехрестя доріг – це вершини графа, а дороги, які з'єднують перехрестя – ребра. За умовою задачі граф є неорієнтовним та простим. Слід написати програму, яка із ребер суміжності сформує матрицю суміжності, обчислить та виведе степені всіх вершин графа.

```
var n,m,i,j,rez,a,b:integer;
    g:array[1..100,1..100] of integer;
begin
// Блок уведення і опрацювання даних
assign(input, 'TRANSITION.DAT');
reset(input);
readln(n,m);
for i:=1 to m do
begin
    readln(a,b);
    g[a,b]:=1;
    g[b,a]:=1;
end;
// Блок підрахунку переходів та виведення результатів
assign(output, 'TRANSITION.DAT');
rewrite(output);
for i:=1 to n do
begin
    rez:=0;
    for j:=1 to n do
        if g[i,j]=1 then inc(rez);
    write(rez, ' ');
end;
writeln;
end.
```

**Задача "Мурляндські вузли".** У Мурляндії є  $N$  міст і  $M$  доріг, які з'єднують деякі з цих міст. У країні є міста з яких виходить одна дорога, а з деяких виходить багато доріг. Усі дороги дають можливість рухатися в обох напрямках. Будемо називати місто "Мурляндським вузлом", якщо з нього виходить хоча б  $k$  доріг. Задано опис доріг Мурляндії, а потрібно знайти всі міста, що є "Мурляндським вузлом".

**Вхідні дані.** У першому рядку вхідного текстового файлу "NODE.DAT" записано числа  $N$  – кількість міст в країні ( $1 \leq N \leq 10000$ ) і  $M$  – кількість доріг між містами ( $1 \leq M \leq 100000$ ). У наступних  $M$  рядках записані два натуральних числа  $u$  і  $v$  ( $1 \leq u, v \leq N, u \neq v$ ) – номери міст, які з'єднанні дорогами. Останній рядок містить ціле число  $k$  ( $1 \leq k \leq 10000$ ). Кожна дорога задається не більше одного разу.

**Вихідні дані.** У перший рядок вихідного текстового файлу "NODE.SOL" вивести число Мурляндських вузлів, а в другий рядок – їх номери в порядку зростання.

Наприклад:

NODE.DAT	NODE.SOL
2 1	2
1 2	1 2
1	
4 3	1
1 2	1
1 3	
1 4	
3	

## Розв'язання

Відкинемо фабулу даної задачі і сформулюємо умову в поняттях теорії графів. Будемо вважати міста вершинами, а дороги ребрами графа. Оскільки на дорогах двонаправлений рух, то граф – неорієнтований. Дано граф, який містить  $n$  вершин і  $m$  ребер. Необхідно знайти всі вершини цього графа, степінь яких більший або дорівнює  $k$ . Для розв'язання такої задачі слід знати, що називається степенем вершини неорієнтованого графа. Потрібно знайти степені всіх вершин, а потім вивести номери вершин, степінь яких більший або дорівнює  $k$ .

```
var i,n,m,k,cnt,u,v:LongInt;
// cnt - змінна для зберігання кількості Мурляндських вузлів
  deg:array [1..10000] of integer;
//масив для зберігання степенів вершин графа
begin
// Блок уведення і опрацювання даних
  assign(input,'NODE.DAT');
  reset(input);
  read(n,m);
  for i:= 1 to m do
  begin
    read(u,v);
//збільшення степенів вершин графа
    inc(deg[u]);
    inc(deg[v]);
  end;
  read(k);
//обчислення кількості Мурляндських вузлів
  cnt:=0;
  for i:= 1 to n do
  begin
    if deg[i]>=k
    then inc(cnt);
  end;
  assign(output,'NODE.SOL');
  rewrite(output);
  writeln(cnt);
  for i:= 1 to n do
  if deg[i]>= k
  then
    if i<n
    then write(i,' ')
    else writeln(i);
end.
```

**Задача "Турботи Автодору".** У країні MystCount через відсутність фінансів давно не ремонтували дороги, а тому багато з них перебуває в жахливому стані. Прем'єр-міністр країни, проїхавшись по одній із таких доріг, дав доручення начальнику "Автодору" подати йому спочатку кількість доріг, які слід терміново ремонтувати. А потім уряд буде шукати гроші для такого ремонту. Країна має  $N$  міст, деякі з яких з'єднані дорогами. Працівники Автодору, перевіряючи стан доріг, позначали "1" ті дороги, які конче необхідно поремонтувати, а "0" – якщо стан дороги був задовільним або ж між містами не було доріг. Причому, якщо шлях із міста  $k$  в місто  $l$  був жахливим, то "1" у своєму звіті як працівник, що проїжджав із  $k$  в  $l$ , так і той працівник, що інспектував шлях із  $l$  в  $k$ . Тепер потрібно у найкоротші терміни визначити кількість доріг, яку потрібно вказати у звіті прем'єр-міністра. Виявилось, що керівник "Автодору" не дуже добре знає математику, тому він просить вас порахувати кількість доріг.



**Вхідні дані.** У першому рядку вхідного текстового файлу "ROAD.DAT" записано число  $N$  ( $0 \leq N \leq 100$ ). У наступних  $N$  рядках записано по  $N$  чисел, кожне з яких є або одиничкою або нуликом.

**Вихідні дані.** У вихідний текстовий файл "ROAD.SOL" вивести одне число – кількість доріг у країні MystCount, які потрібно терміново ремонтувати.

Наприклад:

ROAD.DAT	ROAD.SOL
4	2
0 1 0 0	
1 0 1 0	
0 1 0 0	
0 0 0 0	

#### Розв'язання

Якщо відкинути фабулу задачі, то для неорієнтованого графа із  $N$  вершинами задано матрицю суміжності. Знайти кількість ребер даного графа. Оскільки вхідні дані є порівняно невеликими числами, то спочатку реалізуємо у програмі зберігання матриці суміжності. Просумувавши всі значення даної матриці ми отримаємо кількість ребер, яка буде удвічі більша за реальну. А тому суму слід поділити на 2.

#### Код програми на мові FreePascal:

```
var n,i,j,h,a:integer;
    g:array[1..100,1..100] of integer;
begin
// Блок уведення даних
assign(input, 'ROAD.DAT');
reset(input);
readln(n);
for i:=1 to n do
for j:=1 to n do
    read(g[i,j]);
// Блок підрахунку доріг
h:=0;
for i:=1 to n do
for j:=1 to n do
    if g[i,j]=1 then inc(h);
a:=h div 2;
// Блок виведення результату
assign(output, ' ROAD.SOL');
rewrite(output);
writeln(a);
end.
```

При великому значенні  $N$ , наприклад порядку  $10^6$ , чи жорстких обмеженнях оперативної пам'яті, дана програма працювала б не ефективно або взагалі б не працювала. Тому врахуємо той факт, що матриця суміжності неорієнтованого графа є симетричною відносно головної діагоналі. Будемо сумувати лише ті одиниці, які лежать над головною діагоналлю.

#### Код програми на мові FreePascal:

```
var a,n,i,j:byte;
    k:integer;
begin
// Блок уведення і опрацювання даних
assign(input, 'ROAD.DAT');
reset(input);
```

```

readln(n);
k:=0;
for i:=1 to n do
for j:=1 to n do
begin
  read(a);
  if (j>i) and (a=1) then inc(k);
end;
// Блок виведення результату
assign(output, 'ROAD.SOL');
rewrite(output);
write(k)
end.

```

**Задача "Благородна гра".** Сашко, який часто програвав Марійці в різних іграх, вирішив придумати свою гру у якій би він переміг. Оскільки хлопець перед цим читав історичний роман, де головний герой був графом, то й назвав гру благородною.

За правилами гри перший гравець, звичайно Сашко, малює на площині  $N$  точок і говорить число  $M$ . Другий гравець (Марійка) повинен відповісти чи можна з'єднати ці  $N$  точок за допомогою  $M$  ліній, так, щоб:

- 1) Кожна лінія з'єднувала рівно дві точки.
- 2) Жодна з ліній не з'єднує точку саму з собою.
- 3) Для будь-якої пари точок існувало не більше однієї лінії, яка з'єднує їх.
- 4) Існують такі дві точки площини  $B$  і  $C$ , що із точки  $B$  не можна по лініях дістатися до точки  $C$ . Причому, у якому б напрямку по цих лініях не йшов.

Якщо Марійка відповідає правильно, то вона виграє, а інакше – Сашко. Оскільки хлопчик нічого не вказав щодо неможливості використання допоміжних засобів, то Марійка написала програму, яка дозволила їй знову вигравати у Сашка. Напишіть і ви програму, яка дозволить вигравати в даній грі.

**Вхідні дані.** У першому рядку вхідного текстового файлу "GAME.DAT" записано число  $T$  – кількість тестів ( $1 \leq T \leq 1000$ ), а в наступних  $T$  рядках записано по два числа  $N$  і  $M$  ( $1 < N \leq 10^9$ ,  $0 \leq M \leq 10^9$ ).

**Вихідні дані.** У вихідний текстовий файл "GAME.SOL" вивести для кожного тесту YES – якщо можна з'єднати точки за вказаними умовами, NO – якщо цього не можна зробити.

Наприклад:

GAME.DAT	GAME.SOL
2	YES
2 0	NO
3 3	

#### Розв'язання

Якщо відкинути фавулу задачі, то потрібно вивести слово "YES", якщо можна побудувати неорієнтований незв'язний граф із  $N$  вершин і  $M$  ребер, у випадку зв'язності графа – вивести "NO". Згідно з теоретичними відомостями, граф  $G$ , який має  $N$  вершин і  $K$  компонент зв'язності може мати ребер не більше ніж  $M = \frac{(N-K) \cdot (N-K+1)}{2}$ .

Тепер із формули максимальної кількості ребер для  $K$  компонент зв'язності стає зрозумілим, що найвигідніше брати випадок, коли  $K=2$ .

#### Код програми на мові FreePascal:

```

vari, n, m, k: longint;
begin
readln(k);
for i:=1 to k do

```

```
begin
readln(n,m);
if (n-1)*(n-2)/2 >=m
then writeln('Yes')
else writeln('No');
end;
end.
```

Отже, запропоновані задачі дозволяють учням визначати, коли слід використовувати знання з теорії графів. А значить, вказаний підбір задач дозволить учителеві не тільки сприяти формуванню в учнів правильного уявлення про основні поняття теорії графів, а й продовжити розвивати в них творче й нестандартне мислення. Це важливо й тому, що в останній час теорія графів активно використовується в багатьох сферах людського життя. При цьому учителеві вдасться також підготувати учнів до участі в олімпіаді з інформатики.

### Література

1. Алгоритмы: построение и анализ, 3-е изд. / Т. Х. Кормен, И. И. Лейзерсон, Р. Л. Ривест, К. Штайн. – М.: Изд-ский дом «Вильямс», 2013. – 1328 с.
2. Долинский М. С. Алгоритмизация и программирование на TurboPascal: от простых до олимпиадных задач: Учебн. пособ. / М.С. Долинский.– СПб.: Питер, 2005. – 237 с.
3. Інформатика. Навчальна програма для 10–11 класів інформаційно-технологічного профілю [Електронний ресурс] – режим доступу:<http://mon.gov.ua/content/Osvita/prof-given.pdf>. – назва з екрану.
4. Мельников О.И. Теория графов в занимательных задачах. Изд. 3-е, испр. и доп. / О.И. Мельников. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 232 с.
5. Окулов С. М. Программирование в алгоритмах [Электронный ресурс] / С. М. Окулов.– 5-е изд. (эл.).– М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014.– 383 с.
6. e-olymp [Електронний ресурс] – режим доступу:<https://www.e-olymp.com>

УДК 371.3:378.14:53

## НЕПОВНИЙ ІЗОМОРФІЗМ КАРТ КЛАСИЧНОЇ МЕХАНІКИ ЯК ОСНОВА СИНТЕТИЧНОГО ВИВЧЕННЯ КУРСІВ ТЕОРЕТИЧНОЇ ФІЗИКИ

О.Г. Шевчук

**Постановка проблеми.** Реалізуючи завдання національної програми «Освіта: Україна XXI століття» набувають нового змісту та наповнення проблеми формування мотивації та пізнавальної активності студентів, вміння інтегрувати отримані знання, застосувати на практиці уміння та навички. Одним з ефективних та дієвих методів у формуванні вказаних вмінь та навичок, які є необхідними складовими професійної компетентності, розвитку евристичного мислення є метод аналогій та його розширення – метод ізоморфізму алгебр фізичних теорій, методологічне значення якого важко переоцінити, адже з переходом на кредитно-модульну систему навчання суттєво зростає кількість навчальних годин, відведена на самостійну роботу студентів. Встановлюючи подібність та неповний ізоморфізм між фізичними явищами та процесами, можна забезпечити гносеологічний плацдарм для інтегрального та синтетичного викладу цілих блоків та модулів навчального матеріалу з циклу теоретичних курсів фізичних дисциплін, таких, які на перший погляд, зовсім несхожі ані у феноменологічному, ані у методологічному аспектах, при цьому суттєво розширивши прогностичну силу аналітичних методів. Саме тому відшукання параметрів фізичних теорій, які задовольняють положенням теорії подібності (критеріям подібності), або принципам теорії аналогій та ізоморфізму (хоча б неповного) алгебр фізичних теорій є важливим аспектом при викладанні, наприклад, теоретичної фізики.

**Аналіз публікацій.** Аналіз літератури показав, що існують можливості застосування методу аналогії не тільки при вивченні теоретичного матеріалу курсу фізики, але й при розв'язуванні задач. Метод аналогії при вивченні фізичних дисциплін детально і всебічно розглянутий в роботах [1 – 5]. В роботах [6, 7] розглянуті аналогії при вивченні тем «Електростатичне поле та його характеристики», «Гравітаційне поле та його характеристики», створена система опорних конспектів, яка суттєвим чином спирається на ці аналогії. Оперуючи термінами концепції методу аналогій в [9] приведені таблиці співвідносності параметрів законів гідродинаміки ідеальної нестисливої рідини в каналах довільної геометричної конфігурації без джерел витоку та стоку параметрам законів постійного струму в колах з довільним розгалуженням, які не містять джерел ЕРС та реактивних елементів. В [9] приведена співвідносність параметрів законів постійного струму та законів теплотехніки для стаціонарних теплових потоків.

Однак нами не виявлено досліджень, які б розширювали методи аналогії та критерії подібності на встановлення ступеня співвідносності між алгебрами фізичних теорій, що було б суттєвим розширенням та поглибленням взаємозв'язків між різними фізичними концепціями.

**Мета роботи.** Встановити можливість проведення неповного ізоморфізму карт класичної механіки за допомогою деяких положень абстрактної алгебри для інтегрального та синтетичного викладу навчального матеріалу курсу теоретичної механіки.

**Виклад основного матеріалу дослідження.** Однією з основних задач класичної механіки є так звана пряма задача – скласти рівняння, які описують еволюцію системи під впливом чинників внутрішнього та зовнішнього характеру і, проінтегрувавши ці рівняння, подати в аналітично завершеній формі, рівняння руху як окремих частин системи, так і її складових. Історично склалося так, що підходив до розв'язання вище зазначеної проблеми було запропоновано декілька. Найбільш розповсюдженими серед них є аналітичні схеми Ньютона, Лагранжа, Гамільтона та Якобі.

Схема Лагранжа як і схема Ньютона призводить до диференціальних рівнянь другого порядку. Схема Гамільтона оперує диференціальними рівняннями першого порядку, щоправда кількість цих рівнянь удвічі більша аніж у схемах Ньютона та Лагранжа.

Але чи ізоморфні між собою на спільній області меж застосування схеми Ньютона, Лагранжа, Гамільтона?

Для відповіді на поставлене питання введемо ряд основних означень та тверджень [1].

Алгеброю називається впорядкована пара  $A = \langle A, \Omega \rangle$ , де  $A$  – не порожня множина,  $\Omega$  – непорожній перелік операцій на  $A$ . Таким чином, алгебра  $A$  визначається двома множинами:

(а) не пустою множиною  $A \equiv |A|$ . Ця множина називається основною множиною алгебри  $A$ , а її елементи – елементами алгебри  $A$ .

(б) не пустою множиною операцій  $\Omega$ , визначених на  $A$ . Ці операції називаються головними операціями алгебри  $A$ .

Дві алгебри  $A = \langle A, \Omega \rangle$ , та  $B = \langle B, \Omega^* \rangle$  називатимемо однотипними, якщо існує ін'єктивне відображення множини  $\Omega \rightarrow \Omega^*$ , при якому всі операції  $f_B \xleftarrow{\psi} f_A, f_B \in \Omega^*, f_A \in \Omega$ , мають один і той же ранг.

В подальшому викладі матеріалу будемо розглядати лише ті алгебри, для яких кардинальні числа  $|\Omega|$  та  $|\Omega^*|$  є дійсними. При цьому перелік елементів  $f_A$  алгебри  $A$  будемо писати у вигляді:

$$A = \langle A, f_1, f_2, \dots, f_s, a_{s+1}, a_{s+2}, \dots, a_n, \rangle,$$

де  $f_i (i \in \overline{1, s})$  – операції на  $A$ , ранг яких перевищує ранг нульмісної операції, а  $a_p (p \in (s+1) \div n)$  – виділені в  $A$  елементи певними нульмісними операціями  $f_{s+1}, f_{s+2}, \dots, f_n$ . Ці елементи називають головними елементами  $A$ .

Нехай  $A$  та  $B$  – дві однотипні алгебри,  $f_A$  – довільна головна операція алгебри  $A$ , а  $f_B$  – головна операція алгебри  $B$  ( $f_A \xleftarrow{\psi} f_B$ ). Тоді відображення  $|A| \xrightarrow{\psi} |B|$  зберігає операцію  $f_A \in \Omega$ , якщо виконується умова:

$$\psi(f_A(a_1, a_2, \dots, a_k)) = f_B(\psi(a_1), \psi(a_2), \dots, \psi(a_k)), \forall a_1, a_2, \dots, a_k \in A. \quad (1)$$

Алгебри  $A$  та  $B$  називаються гомоморфними ( $A \oplus B$ ), якщо існує відображення  $\psi|A|$  в  $(на) |B|$ , яке зберігає всі основні операції  $f_A$  цієї алгебри. В [1] доведені наступні теореми:

**Теорема 1.** Нехай  $\psi_1$  – гомоморфізм алгебри  $A$  в алгебру  $B$ ;  $\psi_2$  – гомоморфізм алгебри  $B$  в алгебру  $C$ . Тоді композиція  $\psi_1 \circ \psi_2$  є гомоморфізмом алгебри  $A$  в алгебру  $C$ .

**Теорема 2.** Нехай  $\psi_1$  – гомоморфізм алгебри  $A$  в алгебру  $B$ ;  $\psi_2$  – гомоморфізм алгебри  $B$  в алгебру  $C$ . Тоді композиція  $\psi_2 \circ \psi_1$  є гомоморфізмом алгебри  $A$  в алгебру  $C$ .

**Теорема 3.** Нехай  $\psi_1$  – ізоморфізм алгебри  $A$  в алгебру  $B$ ;  $\psi_2$  – ізоморфізм алгебри  $B$  в алгебру  $C$ . Тоді композиція  $\psi_2 \circ \psi_1$  є гомоморфізмом алгебри  $A$  в алгебру  $C$ .

Доведемо ізоморфізм на спільній області меж застосування схем Ньютона, Лагранжа, Гамільтона.

Записуємо другий закон Ньютона у формі

$$m\ddot{Q} + \partial_Q U(Q, t) + \partial_Q U^*(Q, Q, \dot{t}) - \hat{I}F^* = \hat{\Theta}, \quad (2)$$

де  $Q$  – сукупність узагальнених координат, що описують систему;  $\dot{Q}$  – сукупність узагальнених швидкостей;  $U$  – потенціал системи;  $U^*$  – узагальнений потенціал системи;  $F^*$  – сукупність потенціальних сил, що діють на структурні частини системи;  $\hat{I}, \hat{\Theta}$  – одиничний та нульовий оператори. З курсу теоретичної механіки знаємо, що рівняння (2) є базовим в схемі (карті) механіки Ньютона. Вибираючи алгебру  $A_N$ , з елементами, що складаються з матеріальних точок, систем матеріальних точок, суцільних середовищ та ввівши на ній базові (головні) операції, що співпадають з арифметичними операціями та операціями диференціального та інтегрального числення отримаємо разом з (2) схему механіки Ньютона.

Введемо функцію Лагранжа

$$L^*(Q, \dot{Q}, t) = \frac{m\dot{Q}^2}{2} - U(Q, t) - U^*(Q, Q, t), \quad (3)$$

яка задовольняє базове рівняння

$$(d_t \partial_{\dot{Q}} - \partial_Q)L^* = \hat{I}F^*. \quad (4)$$

Маємо схему (карту) Лагранжа теоретичної механіки, якщо алгебру цієї карти співставити із алгеброю  $A_N$  Ньютона.

Разом з тим, з вище проведених еквівалентних перетворень базового рівняння (2) схеми Ньютона в рівняння (4), яке є базовим у схемі Лагранжа та з припущень щодо алгебр в схемах Ньютона та Лагранжа, отримуємо:  $A_L \oplus A_N$ .

Введемо функцію Гамільтона

$$H(Q, \dot{Q}, t) = \frac{m\dot{Q}^2}{2} + U(Q, t) \quad (5)$$

Знайдемо диференціал від функції Гамільтона двома способами

$$dH(Q, B, t) = dQ \partial_Q H + dB \partial_B H + dt \partial_t H \quad (6)$$

$$\frac{\partial L(Q, \dot{Q}, t)}{\partial \dot{Q}} = \partial_{\dot{Q}} L = B \quad (7)$$

Враховуючи, що

$$H(Q, B, t) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{Q} \partial_{\dot{Q}} L(Q, \dot{Q}, t) - L(Q, \dot{Q}, t) \quad (8)$$

та використовуючи (7) маємо:

$$H(Q, B, t) = \dot{Q} B - L \quad (8^*)$$

Разом з (8\*) та (6)

$$H(Q, B, t) = d(\dot{Q} B) - dL(Q, \dot{Q}, t) = B d\dot{Q} + \dot{Q} dB - d\dot{Q} \partial_{\dot{Q}} L \quad (9)$$

З рівняння Лагранжа

$$d_t \partial_{\dot{Q}} L(Q, \dot{Q}, t) - \partial_Q L(Q, \dot{Q}, t) = F^*, \quad (10)$$

де  $F^*$  - сукупність непотенціальних сил.

У випадку потенціальних сил з (10) отримуємо

$$d_t \partial_{\dot{Q}} L(Q, \dot{Q}, t) = \partial_Q L(Q, \dot{Q}, t). \quad (11)$$

З (11) та (7) отримуємо:

$$\dot{B} = \partial_Q L. \quad (12)$$

Підстановка (12) в (11) дає

$$dH(Q, B, t) = \dot{Q} dB - \dot{B} dQ - dt \partial_t L. \quad (13)$$

Прирівнюючи (6) та (13) маємо

$$\begin{cases} \partial_Q H = -\dot{B}, \\ \partial_B H = \dot{Q}, \\ \partial_t H = -\partial_t L. \end{cases} \quad (14)$$

Рівняння (14) є так званими канонічними рівняннями Гамільтона.

Покладемо  $A_H \oplus A_L$ , де  $A_H$  – алгебра Гамільтона, тоді за теоремою 3:  $A_H \oplus A_M$ . Рівняння (7) разом з умовою  $A_H \oplus A_L$  складають схему Гамільтона механіки.

Перші два рівняння (14) можна подати єдиним уніфікованим рівнянням

$$\partial_{Q/B} H = -/+d_t(B/Q). \quad (15)$$

Аналізуючи отримані вище результати приходимо до висновку про те, що рівняння (15) отримується з (11) еквівалентними перетвореннями. Отже, базові рівняння в картах Лагранжа та Гамільтона еквівалентні між собою:

$$d_t \partial_{\dot{Q}} L(Q, \dot{Q}, t) - \partial_Q L(Q, \dot{Q}, t) \leftrightarrow \partial_{\frac{Q}{B}} H = -\frac{+d_t(\frac{B}{Q})}{+d_t(\frac{B}{Q})}. \quad (16)$$

**Висновки та перспективи подальших досліджень.** На завершення вкажемо на відмінність розвинутого в статті математичного формалізму від підходів, які притаманні *теорії подібності* [8]. Теорія подібності оперує *критеріями подібності*, які підкоряються трьом теоремам подібності [8]. Метод ізоморфізму алгебр фізичних параметрів, про який йшла мова в цій статті, є більш загальним підходом для вивчення фізичних процесів, адже він може бути застосованим і до опису процесів, які не задовольняють методам теорії подібності, наприклад, не є її критеріями, а є бісктивним відображенням між *математичними операціями над параметрами фізичних теорій* в яких явища та процеси виступають дуальним поєднанням об'єкту-образу та об'єкту-прообразу.

## Література

1. Вовк Л.І. Роль методу аналогії при викладенні фізики у вузі / Л.І. Вовк // Наукові записки: Зб. наук. праць. – Харків: ХДУ, 1998. – С. 129-132.
2. Вовк Л.І. Значення використання аналогій у навчанні для розвитку мислення студентів / Л.І. Вовк // Вісник Чернігівського державного педагогічного університету ім. Т.Г.Шевченка. Серія: Педагогічні науки. – Чернігів: ЧДПУ ім. Т.Г. Шевченка, 2000. – № 3. – С. 21-22.
3. Вовк Л.І. Аналогії у навчанні/Л.І. Вовк // Матеріали VIII Міжнародної Наукової Конференції імені академіка М. Кравчука. – Київ.: НТУУ (КПІ), 2000. – 500 с.
4. Вовк Л.І. Метод аналогії як один із шляхів інтенсифікації навчання фізиці у вузі / Л.І. Вовк, В.П. Лобань //Інтенсивні технології у навчальному процесі – головна умова пок-

- рашення якості підготовки фахівців: Матеріали науково-методичної конференції. – Полтава: ПКІ, 1997. – С. 116-117.
5. Вовк Л.І. Використання аналогії – одна з ефективних форм узагальнення і систематизації знань/Л.І. Вовк, П.Я. Михайлик//Дидактичні проблеми фізичної освіти в Україні: Матеріали науково-практичної конференції. – Чернігів: ЧДПУ, 1998. – С. 27-30.
  6. Закалюжний В.М. Система порівняльних опорних конспектів тем «Електростатичне поле та його характеристики» та «Гравітаційне поле та його характеристики» В.М. Закалюжний, О.Г. Шевчук // Вісник Чернігівського державного педагогічного університету ім. Т.Г. Шевченка. Серія: Педагогічні науки. – Чернігів: ЧДПУ ім. Т.Г. Шевченка, 2011. – Вип. 89. – С. 268-274.
  7. Закалюжний В.М. Опорні конспекти лекцій з теми «Електростатика» як засіб систематизації та узагальнення знань студентів з фізики// В.М. Закалюжний, О.Г. Шевчук // Вісник Чернігівського державного педагогічного університету ім. Т.Г. Шевченка. Серія: Педагогічні науки. – Чернігів: ЧДПУ ім. Т.Г. Шевченка, 2013. – Вип. 109. – С. 168-175.
  8. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел / Л.Я. Куликов. – Москва: Высшая школа, 1974. – 560 с.
  9. Мельничук О.В. Використання понятійного апарату абстрактної алгебри для синтетичного викладу студентам університету деяких розділів загальної та теоретичної фізики / О.В.Мельничук, О.Г. Шевчук // Вісник Чернігівського державного педагогічного університету ім. Т.Г. Шевченка. Серія: Педагогічні науки. – Чернігів: ЧДПУ ім. Т.Г. Шевченка, 2010. – Вип. 77. – С. 237-241.

## ЗМІСТ

Василь Павлович Яковець – людина, вчений, педагог .....	3
<b>1. МАТЕМАТИКА.....</b>	<b>5</b>
<i>Віра М.Б., Снівак С.О.</i> Крайова задача для лінійної виродженої сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь .....	5
<i>Казачков І.В.</i> Методики визначення і розрахунку критичних рівнів у розвитку складних систем різної природи з відхиляючими аргументами для їх дослідження та оптимального керування ними і пригнічення коливань в суцільних середовищах.....	12
<i>Казачков І.В.</i> Моделювання нелінійних параметричних поздовжньо-крутильних коливань обертового стрижня та явище реверсу .....	24
<i>Чернишова Е.О.</i> Параметричні рівняння уявних мінімальних поверхонь .....	30
<i>Чорненька О. В., Рудько І. А.</i> Короткі історичні відомості про дослідження сингулярно збурених диференціальних рівнянь з іррегулярною особливою точкою .....	33
<i>Чорненька О.В.</i> Системи лінійних диференціальних рівнянь з параметром та особливою точкою у частинному випадку лінійних диференціальних рівнянь з параметром та особливою точкою .....	39
<b>2. ФІЗИКА .....</b>	<b>44</b>
<i>Гурчина Я.М., Давиденко С.М., Кнорозок Л.М.</i> Отримання різних просвітлюючих покриттів для різних оптичних матеріалів на установці ВУ-1А .....	44
<i>Венгер С.Ф., Венгер І.В., Мельничук Л.Ю., Мельничук О.В.</i> Оптимізація критеріїв для дисперсійного аналізу спектрів ІЧ-відбивання від поверхні монокристалів оксиду цинку .....	48
<i>Шевчук О.Г.</i> Підвищення роздільної здатності методу Аленцева-Фока при декомпозиції складних спектрів катодолюмінісценції напівпровідникових гетероструктур .....	54
<b>3. ІНФОРМАТИКА.....</b>	<b>58</b>
<i>Глушко І.М.</i> Топ 10 суперкомп'ютерів із списку Топ 500 .....	58
<i>Павлюк А.В.</i> Звітність та аналіз баз даних за допомогою dbForge Studio for MySQL.....	65
<i>Фетісов В.С.</i> Побудова діаграм розмаху за допомогою STATISTICA.....	68
<i>Фетісов В.С., Дядечко М.П.</i> Системи для автоматичного формування навчального розкладу .....	73
<b>4. МЕТОДИКА.....</b>	<b>77</b>
<i>Барило Н. А.</i> Однорідні рівняння: від алгебраїчних до диференціальних .....	77
<i>Бойко Л.М.</i> Формування математичних компетенцій в умовах інтегрованого навчання.....	82
<i>Варущик Н.П., Горох Я.В.</i> Комп'ютерно – орієнтовані уроки у евристичному навчанні алгебри .....	84
<i>Варущик Н.П., Андруша В.М.</i> Розвиток пізнавальної активності у евристичному навчанні числових систем на уроках математики базової школи.....	91
<i>Головіна Н.О.</i> Методика вивчення онлайн сервісу Prezi.com.....	97
<i>Іванов В.В.</i> Подання синтаксичної кількості інформації при викладанні комп'ютерних дисциплін .....	101



---

<i>Карпенко С.І., Кнорозок Л.М.</i> Використання інформаційно-комунікаційних технологій на уроках фізики.....	105
<i>Ковальчук Ю.О., Лісова Т.В.</i> Досягнення українських восьмикласників у математичному тестуванні TIMSS-2011: гендерний аспект.....	107
<i>Руденко М.П.</i> Особливості вивчення дисципліни «Основи охорони праці» на першому курсі.....	114
<i>Харченко В.М.</i> До проблеми вивчення основних понять теорії графів при підготовці учнів до олімпіад з інформатики.....	117
<i>Шевчук О.Г.</i> Неповний ізоморфізм карт класичної механіки як основа синтетичного вивчення курсів теоретичної фізики.....	123

Наукове видання

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ ЗАПИСКИ

Збірник наукових праць

Відповідальний редаткор – Ковальчук Ю.О.  
Верстка, макетування – Ковальчук Ю.О.

*Книга друкується за авторським редагуванням*

---